Praktikum Theoretische Physik, Sommersemester 2019 Produktion von Top-Antitop-Paaren an der Schwelle*[1]

André Hoang, Universität Wien

Das Topquark im Rahmen des Standardmodells

Das Topquark ist das schwerste bekannte Elementarteilchen und wurde 1995 beim Tevatron-Experiment am Fermilab (Nähe Chicago, USA) entdeckt [1]. Mit seiner Masse von ca. 173 GeV (Masse des Protons: $m_p = 0.938.3$ GeV) ist es im Gewicht vergleichbar zu einem Goldatom ($m_A \approx 197\,m_p$). Im Rahmen des Standardmodells der Elementarteilchenphysik spielt das Topquark eine wichtige Rolle, da es als schwerstes Elementarteilchen auch einen konzeptionellen Zusammenhang zum erst kürzlich entdeckten Higgs-Boson haben muss, durch das ja alle Elementarteilchen ihre Masse erhalten. Insbesondere ist deshalb die Masse des Topquarks m_t einer der wichtigsten Parameter des Standardmodells und wird mit viel Aufwand bei den Experimenten des Large-Hadron-Colliders gemessen. Eine der genauesten bisher ausgeführten Messungen wurde kürzlich vom CMS-Experiment gemacht, mit dem Resultat $m_t = 172.44 \pm 0.13(\text{stat}) \pm 0.47(\text{syst})$ GeV [2], wobei der erste Fehler der statistische Fehler ist und der zweite der systematische.

Eine weitere Besonderheit des Topquarks ist seine sehr kurze Lebensdauer. Das Topquark zerfällt mittels der schwachen Wechselwirkung in ein Bottomquark und ein W-Boson. Die Lebensdauer $\tau_t = 5\times10^{-25}s$ ist so klein, dass man das Topquark nicht anhand einer Teilchenspur bei den LHC-Detektoren nachweisen, sondern nur indirekt durch die Existenz seiner Zerfallprodukte identifizieren und studieren kann. Anstatt der Lebensdauer von Elementarteilchen betrachtet man in der Elementarteilchenphysik üblicherweise die sogenannte "Breite" Γ, welche genau das inverse der Lebensdauer ist: $\Gamma = 1/\tau$. Das Topquark hat die Breite $\Gamma_t = 1.4$ GeV.

Top-Antitop-Paarproduktion an der Schwelle am Linear Collider

Ein mögliches zukünftiges Projekt der Elementarteilchenphysik ist der sogenannte **Linear Collider** (LC), welcher Kollisionen von Elektronen (e^-) und Positronen (e^+) bei Schwerpunktsenergien Q oberhalb von 250 GeV ausführen soll, wobei die Schwerpunktsenergie die Summe Gesamtenergien der Elektronen und Positronen ist und das Schwerpunktssystem das System ist, bei dem die Summe der Impulse von Elektron und Positron gerade Null ergibt. Bei der Kollision von einem Elektronen-Positron-Paar ent-

[1] In diesem Praktikumsprojekt werden die sogenannten natürlichen Einheiten der Elementarteilchenphysik mit $\hbar = c = 1$ benützt. Das heisst, dass alle Größen in positiven und negativen Potenzen der Einheit Elektronvolt (eV) angegeben und gemessen werden können. Konkret benutzen wir in diesem Projekt die Grundeinheit GeV$= 10^9$ eV, wobei ein GeV in etwa der Masse eines Protons oder eines Wasserstoffatoms entspricht. In natürlichen Einheiten werden Energie und Impuls in Einheiten von GeV angegeben, der Drehimpuls ist dimensionslos und Zeit und räumliche Abstände werde in ein Einheiten von GeV^{-1} angegeben.

steht im Schwerpunktsystem entweder ein virtuelles Photon oder ein virtuelles Z-Boson, wobei virtuell bedeutet, dass Poton und Z-Boson die Energie Q haben jedoch keinen Impuls. Deshalb zerfallen das Photon und das Z-Boson praktisch sofort. Dabei ist auch die Produktion eines Top-Antitop-Paars ($t\bar{t}$) möglich. Die Produktionsraten von allen möglichen Endzuständen, die dabei auftreten können werden durch die Wirkungsquerschnitte σ der jeweiligen Reaktionen quantifiziert, i.e. je größer ein Wirkungsquerschnitt desto höher ist die Rate für die jeweilige Reaktion. Man kann sich also einen Wirkungsquerschnitt als Größe einer Fäche vorstellen: je größer die Fläche, desto eher wird sie bei der Kollision des e^+e^--Paars getroffen. Ein Wirkungsquerschnitt hängt von der Schwerpunktsenergie und der Masse der produzierten Teilchen ab, und auch von der Wechselwirkung der produzierten Teilchen untereinander. Wenn die Schwerpunktsenergie kleiner als die Massen der produzierten Teilchen ist, ist der Wirkungsquerschnitt natürlich Null, da dann ja aufgrund von Energieerhaltung gar keine Teilchenproduktion auftreten kann. Die Schwerppunktsenergie, bei der der Wirkungsquerschnitt für eine bestimmte Reaktion erstmals ungleich Null werden kann, nennt man "Schwelle". In der Nähe der Schwelle für die Produktion eines $t\bar{t}$-Paars haben Top- und Antitopquarks sehr kleine Geschwindigkeiten, sie sind also nicht-relativistisch.

Beim LC kennt man die Schwerpunktsenergie Q mit einer Genauigkeit von besser ungefähr 0.02 GeV und deshalb kann man die Schwelle für die Produktion von $t\bar{t}$-Paaren und somit auch die Massen der Topquarks viel genauer vermessen als beim LHC. (Top- und Antitopquarks haben aufgrund der Poincare-Symmetrie exakt die gleiche Masse.) Gäbe es nun keine Wechselwirkung zwischen einem Top- und einem Antitopquark, wäre diese Schwelle exact $Q_{\rm schw} = 2m_t$. Jedoch unterliegen Quarks der starken Wechselwirkung[2] welche im Bereich der Schwelle zwischen dem Top- und dem Antitopquark interessanterweise wie ein attraktives Coulombpotential der Form ($r = |\vec{x}|\ \ a \equiv C_F\alpha_s$)

$$V_{\rm QCD}(r) \,=\, -\frac{C_F\alpha_s}{r} \tag{1}$$

wirkt, wobei $C_F = 4/3$ eine für die starke Wechselwirkung charakteristische Konstante für Quark-Antiquark-Wechselwirkungen ist und $\alpha_s = 0.1$ die starke Kopplungskonstante ist bei der Energie der $t\bar{t}$-Schwelle. Ingesamt läßt sich die Dynamik des $t\bar{t}$-Paars im Schwerpunktssystem deshalb (in der Ortsraumdarstellung) durch eine nicht-relativistische Schrödinger-Gleichung der Form

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) \,=\, H\,\psi(\vec{x},t) \tag{2}$$

beschreiben mit

$$H \,=\, -i\,\Gamma_t \,-\, \frac{\vec{\nabla}^2_{\vec{x}}}{m_t} \,+\, V_{\rm QCD}(|\vec{x}|)\,. \tag{3}$$

Die Ortsvariable $\vec{x}$ ist dabei der Abstand zwischen Top- und Antitopquark. Die Topquarkbreite geht dabei wie ein imaginärer Beitrag zur Ruhemasse der Topquarks ein. Es ergibt sich daraus, dass die $t\bar{t}$-Paare auch Bindungszustände eingehen können, die ganz analog zu den Bindungszuständen des Wasserstoffatoms entstehen und im Limes $\Gamma_t \to 0$ sehr

[2]Quarks unterliegen auch der elektromagnetischen Wechselwirkung, die jedoch im Rahmen unserer Diskussion im Vergleich zur starken Wechselwirkung einen sehr kleinen Effekt hat.

ähnliche Eigenschaften haben. Dadurch verschiebt sich die Produktionsschwelle um die Grundzustandsenergie E_1 zu kleineren Energien, $Q_{\rm Schw} = 2m_t - E_1$ und der Wirkungsquerschnitt erfährt im Vergleich zum wechselwirkungsfreien Fall eine stark veränderte Form, in der die neuen Bindungszustände sichtbar sind. Aufgrund der Breite der Top- und Antitopquarks ist jedoch lediglich der Grundzustand noch im Wirkungsquerschnitt sichtbar.

Grundlagen für Berechnung des $t\bar{t}$-Wirkungsquerschnitts an der Schwelle

Aus Gl. (2) kann man die Energieeigenlösungen für die $t\bar{t}$-Wellenfunktionen aus der Eigenwertgleichung $(H-E)\psi(\vec{x}) = 0$ erhalten. Die Greensche Funktion dieser Gleichung ist definiert durch die Gleichung

$$(H - E)\, G(\vec{x}, \vec{x}', E, m_t, \Gamma_t, C_F\alpha_s) \;=\; \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\,. \qquad (4)$$

Die Greensche Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}', ...)$ läßt sich interpretieren als Wahrschreinlichkeit, dass ein $t\bar{t}$-Paar (mit Coulombwechselwirkung) mit Abstandvektor $\vec{x}\,'$ in einen Zustand mit dem Abstandsvektor $\vec{x}$ übergeht. Mit Hilfe von quantenfeldtheoretischen Berechnungen läßt sich nun zeigen, dass das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts für $t\bar{t}$-Produktion an der Schwelle $Q \approx 2m_t$ zum Wirkungsquerschnitt für die Produktion von $\mu^+\mu^-$-Paaren (genannt ,,R-Verhältnis für $t\bar{t}$-Produktion") die Form hat

$$R_{t\bar{t}}(Q) \;=\; \frac{\sigma(e^+e^- \to t\bar{t})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \;=\; \frac{8\pi}{m_t^2}\,\mathrm{Im}\Big[\,G(0, 0, Q - 2m_t, m_t, \Gamma_t)\,\Big]\,. \qquad (5)$$

Projektziele

(a) Leiten Sie sich den theoretischen Ausdruck für das R-Verhältnis $R_{t\bar{t}}$ ab.

(b) Zeichnen Sie mit Hilfe von z.B. Mathematica das R-Verhältnis als Funktion von Q im Schwellenbereich ($m_t = 173$ GeV) und erklären Sie, warum man neben der Topmasse m_t auch die Topbreite Γ_t und die starke Kopplungskonstante α_s aus einer Messung von $R_{t\bar{t}}$ bestimmen kann.

(c) Im Limes $\Gamma_t \to 0$ kann man im R-Verhältnis $R_{t\bar{t}}$ die verschiedenen Bindungszustände (Toponiumzustände) klar als Resonanzen erkennen. Weisen Sie nach, dass diese Resonanzen in der Tat den möglichen Bindugszuständen entsprechen.

Aufgaben

1. Schreiben Sie die Schrödinger-Gleichung für ein Top- und ein Antitopquark mit der Coulombwechselwirkung von Gl. (1) auf und wechseln Sie zu Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. Identifizieren Sie den Hamiltonoperator in Gl. (3) und erkären Sie, warum Sie den Anteil des Hamiltonoperators, der die Schwerpunktsbewegung beschreibt vernachlässigen können.

2. Identifizieren Sie die Definitions-Gleichung der Greenschen Funktion G_0 im wechselwirkungsfreien Fall $V_{\rm QCD} = 0$. Welche Interpretation hat $G_0(\vec{x}, \vec{x}', ...)$? Lösen Sie mit der freien Greenschen Funktion formal die Gleichung für die Greensch Funktion G. Welche Interpretation ergibt sich dadurch für die Greensche Funktion G mit Coulombwechselwirkung?

3. Transformieren Sie die Schrödinger-Gleichung für die Greensche Funktion in Gl. (4) in die Impulsraumdarstellung, wobei Sie die Konvention $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = e^{i \vec{p} \vec{x}}$ benutzen und die Faktoren von inversen Faktoren 2π nur bei der Impulsraumintegration anwenden, i.e Sie benutzen $\int d^3\vec{x}$ bzw. $\int d^3\vec{p}/(2\pi)^3$ und die Impulsraum-Greenfunktion ist definiert als

$$\tilde{G}(\vec{p}, \vec{p}', ...) = \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\, e^{-i \vec{p} \vec{x}}\, G(\vec{x}, \vec{x}', ...)\, e^{i \vec{p}' \vec{x}'} \tag{6}$$

Nutzen Sie die Bra-Ket-Notation, um die Form der benötigeten Integrale herzuleiten. Hinweis:

$$\int_0^\infty dx \sin(px)\, e^{-mx} = \frac{p}{m^2 + p^2}\,.$$

4. Betrachten Sie nun wieder den wechselwirkungsfreien Fall $V_{\rm QCD} = 0$ und bestimmen Sie die Greensche Funktion im Impulsraum.

5. Berechnen Sie daraus das R-Verhältnis $R_{t\bar{t}}$ für den wechselwirkungsfreien Fall. Hinweis:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + A} = \frac{\pi}{2\sqrt{A}}\,, \quad \mathrm{Im}[A] \neq 0\,, \quad \mathrm{Re}[A] \leq 0\,.$$

6. Machen Sie Zeichungen für das R-Verhältnis $R_{t\bar{t}}$ im wechselwirkungsfreien Fall für die Fälle $\Gamma_t = 1.4$ GeV und $\Gamma_t = 0$. Welche Beobachtung können Sie Vergleich der beiden Fälle machen? (Nutzen Sie die Zeichenmöglichkeiten, die ihnen Mathematica bietet!)

7. Die Greensche Funktion $G(0, \vec{x}', \ldots)$ mit Coulomb-Wechselwirkung ist nur noch von $r = |\vec{x}'|$ abhängig und läßt sich in der Form

$$G(0, r, E, m_t, \Gamma_t, a) = -i\, \frac{m_t^2 v}{2\pi} \exp(i\, mvr)\, \Gamma(1 - i\rho)\, U(1 - i\rho, 2, -2i\, mvr) \tag{7}$$

schreiben mit

$$v = \sqrt{\frac{E + i\Gamma_t}{m_t}}\,, \qquad \rho = \frac{a}{2v}\,.$$

Hierbei ist $\Gamma(x)$ die Gammafunktion und U Tricomi's konfluente hypergeometrische Funktion. Zeigen Sie, dass sich im wechselwirkungsfreien Limes das Resultat aus Aufgabe 6 ergibt. Hinweis:

$$(b - a - 1)U(a, b - 1, z) + (1 - b - z)U(a, b, z) + zU(a, b + 1, z) = 0\,, \tag{8}$$

$$U(a, 1, z \ll 1) = \tfrac{1}{\Gamma(a)}\Big(\ln(z) + \psi(a) + 2\gamma_E \Big) + O(z)\,, \tag{9}$$

$$U(a, 0, z) \ll 1) = \tfrac{1}{\Gamma(a+1)} + \tfrac{1}{\Gamma(a)}\Big(\ln(z) + \psi(1 + a) + 2\gamma_E - 1 \Big)\, z + O(z^2)\,, \tag{10}$$

wobei γ_E die Euler-Mascheroni und $\psi(x)$ die Digamma-Funktion sind. Sie brauchen auch noch Eigenschaften der Digamma-Funktion, die Sie in einer mathematischen Formelsammlung oder im Internet finden können.

8. Berechnen Sie den Limes $r \to 0$ von $G_c(0, r, ...)$ aus Gl. (7) und zeigen Sie, dass sich das Ergebnis

$$G_c(0, r, ...) \xrightarrow{r\to 0} \frac{m_t^2}{4\pi}\left(\frac{1}{m_t r}+iv\right) + \frac{m_t^2 a}{4\pi}\Big(1-2\gamma_E-\ln(2m_t r)-\ln(-iv) - \psi(1-i\rho)\Big) \tag{11}$$

ergibt, wobei $\psi(x)$ die Digamma-Funktion ist. Diskutieren Sie die beiden Singularitäten für $r \to 0$, und gehen Sie darauf ein, ob diese bei der späteren Anwendung eine Rolle spielen.

9. Schließen Sie nun Projektziel (a) ab, wobei Sie nicht explizit den Imaginärteil der Digamma-Funktion analytisch bestimmen brauchen.

10. Bearbeiten Sie nun Projektziel (b), wobei Sie den Schwerpunktsenergiebereich von 5 GeV unterhalb bis 5 GeV oberhalb von $2m_t$ analysieren. Fertigen Sie Bilder (Mathematica!) an, die zeigen, wie sich das R-Verhältnis durch die Coulombwechselwirkung im Vergleich zum wechselwirkungsfreien Fall verändert. Zeigen Sie, wie sich das R-Verhältnis ändert, wenn Sie die Topmasse m_t um 0.1 GeV und Γ_t und α_s um jeweils ± 10% und ± 20% von ihren Ausgangswerten verändern. Diskutieren Sie qualitativ, wie sich Fehler in den Werten von Γ_t und α_s qualitativ auf die Messung der Topquarkmasse auswirken.

11. Fertigen Sie ein Bild für $\Gamma_t = 0.01$ GeV an. Die sichtbaren Resonanzen sind die gebundenen Toponium-zustände.

12. Identifizieren Sie die analytischen Ausdrücke für die Bindungsenergien aus dem Problem des Wasserstoffatoms, wobei Sie nicht vergessen dürfen, dass die reduzierte Massen in beiden Fällen verschieden sind. Zeigen Sie durch numerische Vergleiche, dass die Positionen der sichtbaren Resonanzen aus Aufgabe 11 in der Tat mit diesen Resultaten kompatibel sind.

Betrachten Sie für die folgenden Aufgabenteile den Limes, dass die Topquark-Breite infinitesimal klein ist, $\Gamma_t \to \epsilon$, ϵ infinitesimal klein, wobei sie ϵ aber nicht exakt auf Null setzen dürfen, da die analytischen Ausdrücke dadurch nicht mehr eindeutig wären.

13. Die Resonanzen kommen alle aus der Funktion $\psi(x)$ in Gl. (11), da diese Pole auf der negativen rellen Achse hat. Die Digamma-Funktion kann auch also folgende konvergente Reihe geschrieben werden:

$$\psi(x) = -\gamma_E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x-1}{k(k+x-1)}\,. \tag{12}$$

Identifizieren sie alle Pole der Digamma-Funktion und zeigen Sie jetzt analytisch, dass die dadurch resultierenden Toponium-Bindungsenergien mit dem vom

Wasserstoffproblem erhaltenen Ausdrücken übereinstimmen. Bestimmen Sie die Residuen der Pole von $\psi(1-i\rho)$ als Funktion der Energie E.

14. Bestimmen Sie $\mathrm{Im}[\psi(1-i\rho)]$ für $E<0$, wobei Sie die Identität

$$\frac{1}{x-x'\pm i\epsilon} = \frac{x-x'\mp i\epsilon}{(x-x')^2+\epsilon^2} \overset{\text{"}\epsilon\to 0\text{"}}{\longrightarrow} \mathcal{P}\frac{1}{x-x'} \mp \pi\delta(x-x') \tag{13}$$

nutzen. Hier bezeichnet $\mathcal{P}$ den Cauchyschen Hauptwert.

15. Es sei die Menge der Zustände $\{|n\rangle\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem zum Hamiltonoperator H mit den entsprechenden Eigenenergien E_n. Es sei für jeden Energiewert E der Operator

$$G(E) \equiv \sum\!\!\!\!\!\!\int_n \frac{|n\rangle\langle n|}{E_n - E - i\epsilon}$$

definiert, wobei die Summe/Integration über alle Energieeigenwerte läuft. Zeigen Sie, dass $(H-E)G(E) = \mathbb{1}$ gilt somit $G(E)$ der abstrakte Operatorausdruck für die Greensche Funktion ist.

16. Wenden Sie diesen Ausdruck auf die Greensche Funktion aus Gl. (11) an und leiten Sie den daraus resultierenden Zusammenhang der Residuen der Bindungszustandspole und den Wellenfunktionen am Ursprung ab. Identifizieren Sie die Form der Wellenfunktionen am Ursprung beim Problem des Wasserstoffatoms (reduzierte Masse nicht vergessen!) und zeigen Sie, dass dieser Zusammenhang konsistent ist mit Ihren Resultaten aus Aufgaben 14 und 15.

17. Für $E>0$ ergibt sich für $\mathrm{Im}[G(0,0,...)]$ der berühmte Sommerfeld-Faktor

$$\mathrm{Im}[G(0,0,...)] = \frac{m_t^2}{4\pi}\frac{a\pi}{1-\exp(-\frac{a\pi}{v})}, . \tag{14}$$

Zeigen Sie die Identität zumindest numerisch. Interessant ist es jedoch auch die Identität analytisch zu zeigen, was jedoch eine schwierige Aufabe darstellt und einiges Geschick erfordert.

18. Schreiben Sie den analytischen Ausdruck auf für das R-Verhältnis $R_{t\bar{t}}$ für alle Q-Werte (also unterhalt und oberhalb der Schwelle $Q_{\mathrm{Schw}} = 2m_t$) für den Limes stabiler Topquarks ($\Gamma_t \to 0$).

Literatur

[1] http://arxiv.org/abs/hep-ex/9503002

[2] https://arxiv.org/abs/1509.04044