# Teilchenphysik III, Wintersemester 2018
# Prüfungsfragen

19. Standardmodell der Teilchenphysik

19.1. Schreiben Sie *alle* im Standardmodell (Minimalversion) vorkommenden Felder, geordnet nach Multipletts bezüglich der Eichgruppe

$$\mathrm{SU}(3)_\mathrm{c} \times \mathrm{SU}(2)_\mathrm{L} \times \mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$$

an. Geben Sie weiters das jeweilige Transformationsverhalten bezüglich der Eichgruppe in der Form $(n_{\mathrm{SU}(3)}, n_{\mathrm{SU}(2)}, Y)$ an, wobei $n_{\mathrm{SU(N)}}$ die Dimension der betreffenden Darstellung bezüglich SU(N) bedeutet und $Y$ die schwache Hyperladung.

Hinweis: Die schwache Hyperladung eines Multipletts ist durch die Formel $Q = T_3 + Y/2$ festgelegt.

19.2. $\vec{W}^\mu = (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu)$ seien die drei zu $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ gehörenden Eichfelder. Schreiben Sie den entsprechenden Teil $\mathcal{L}_W$ der Lagrangedichte des Standarmodells an.

19.3. $B^\mu$ sei das zu $\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ gehörende Eichfeld. Schreiben Sie den entsprechenden Teil $\mathcal{L}_B$ der Lagrangedichte des Standarmodells an.

19.4. Wie lautet die *allgemeine* Form der kovarianten Ableitung $D_\mu$ im Standardmodell, ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und $B_\mu$ (ohne Gluonfelder).

19.5. Wie lautet die explizite Form der auf das Higgsdublett $\phi$ wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und $B_\mu$?

$$D_\mu \phi = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.6. Wie lautet die explizite Form der auf das rechtshändige SU(2)-Singlett $u_\mathrm{R}$ wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und $B_\mu$?

$$D_\mu u_\mathrm{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.7. Wie lautet die explizite Form der auf das rechtshändige SU(2)-Singlett $d_\mathrm{R}$ wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und $B_\mu$?

$$D_\mu d_\mathrm{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.8. Wie lautet die explizite Form der auf das rechtshändige SU(2)-Singlett $\ell_\mathrm{R}$ wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und $B_\mu$?

$$D_\mu \ell_\mathrm{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.9. Wie lautet die explizite Form der auf das linkshändige Leptondublett $L$ wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und $B_\mu$?

$$D_\mu L = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.10. Wie lautet die explizite Form der auf das linkshändige Quarkdublett $q_\mathrm{L}$ wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und $B_\mu$?

$$D_\mu q_\mathrm{L} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.11. Wie lauten die Yukawaterme in der minimalen Version des Standardmodells?

$$-\mathcal{L}_\mathrm{Y} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.12. Wie lautet das Higgspotential des Standardmodells?

$$V(\phi) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.13. Bestimmen Sie die folgenden Werte der schwachen Hyperladung: $Y(L)$, $Y(\ell_\mathrm{R})$, $Y(q_\mathrm{L})$, $Y(u_\mathrm{R})$, $Y(d_\mathrm{R})$, $Y(\phi)$.

19.14. Die Lagrangedichte (des elektroschwachen Teils) des Standardmodells besteht aus den folgenden Termen:

$$\mathcal{L}_\mathrm{GWS} = \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_B + \sum_\psi \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\mathrm{Y} - V$$

- Aus welchem Term kann man - nach spontaner Symmetriebrechung - die Massen der Vektorbosonen erhalten?
- Aus welchem Term kann man - nach spontaner Symmetriebrechung - die Massen der Fermionen erhalten?
- Aus welchem Term kann man - nach spontaner Symmetriebrechung - die Masse des Higgsbosons erhalten?

19.15. Bestimmen Sie die Massen der Vektorbosonen aus dem Term $\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi$.

- Wie lautet die auf das Higgsdublett $D_\mu\phi$?
- Verwenden Sie, dass der Vakuumerwartungswert des Higgsdubletts $\phi$ in der Form

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad v > 0,$$

geschrieben werden kann.

- Wie ist der Zusammenhang zwischen $W_1, W_2$ und $W^\pm$?
- Berechnen Sie $D_\mu \langle 0|\phi|0\rangle$.
- Berechnen Sie $(D_\mu\langle 0|\phi|0\rangle)^\dagger D^\mu \langle 0|\phi|0\rangle)$. Lesen Sie $M_W^2$ ab. Welche Linearkombination von $W_3$ und $B$ entspricht dem $Z$-Boson?
- Der Zusammenhang zwischen Masseneigenfeldern $Z, A$ ($Z^0$-Boson und Photon) und $W_3, B$ ist durch die orthogonale Transformation

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_\mathrm{W} & -\sin\theta_\mathrm{W} \\ \sin\theta_\mathrm{W} & \cos\theta_\mathrm{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix}$$

  gegeben. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen dem Weinbergwinkel $\theta_\mathrm{W}$ auf der einen Seite und den Kopplungen $g$ und $g'$ auf der anderen Seite. Lesen Sie weiters $M_Z^2$ ab. Was erhalten Sie für $M_W/M_Z$?
- Drücken Sie die kovariante Ableitung (in allgemeiner Form) durch die Masseneigenfelder $W^\pm, Z, A$ aus. Lesen Sie den Zusammenhang zwischen $e$, $g$ und dem Weinbergwinkel ab.
- Man erhält den vollständigen Ausdruck für $\mathcal{L}_\phi$ in der unitären Eichung, wenn man den kinetischen Term für das Higgsfeld $h$ hinzufügt und die eben erhaltenen Massenterme der Vektorbosonen mit dem Faktor $(1 + h/v)^2$ multipliziert. Schreiben Sie $\mathcal{L}_\phi$ an. Lesen Sie die Feynmanregel für den Vertex $W^+W^-h$ ab.

19.16. Higgspotential

- Ermitteln Sie die Minimumsbedingung für das Higgspotential

$$V(\phi) = -r\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \qquad r, \lambda > 0.$$

- Verwenden Sie

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v > 0,$$

  um den Zusammenhang zwischen $v$, $\lambda$ und $r$ herzustellen.
- Drücken Sie das Higgspotential (in der unitären Eichung) durch $h$, $\lambda$ und $v$ aus. Lesen Sie die Higgsmasse ab.
- Lesen Sie die Feynmanregel für den $h^4$-Vertex ab.

19.17. Wie groß ist der gemessene Wert der Higgsmasse?

19.18. Drücken Sie die Selbstkopplungen der Vektorbosonen durch die Masseneigenfelder $W^\pm$, $Z^0$ und $A$ aus.

19.19. Schreiben Sie jene Yukawakopplungen an, aus denen man nach spontaner Symmetriebrechung die Massenmatrizen der geladenen Leptonen erhält. Erläutern Sie, wie man die entsprechenden Masseneigenfelder und deren Kopplungen an das Higgsfeld erhält.

19.20. Schreiben Sie jene Yukawakopplungen an, aus denen man nach spontaner Symmetriebrechung die Massenmatrizen der Quarks mit Ladung 2/3 erhält. Erläutern Sie, wie man die entsprechenden Masseneigenfelder und deren Kopplungen an das Higgsfeld erhält.

19.21. Schreiben Sie jene Yukawakopplungen an, aus denen man nach spontaner Symmetriebrechung die Massenmatrizen der Quarks mit Ladung $-1/3$ erhält. Erläutern Sie, wie man die entsprechenden Masseneigenfelder und deren Kopplungen an das Higgsfeld erhält.

19.22. Schreiben Sie jenen Teil $\mathcal{L}_{\mathrm{cc}}$ der Lagrangedichte des Standardmodells an, der die Kopplung des geladenen schwachen Stroms an die $W$-Bosonen beschreibt. Drücken Sie $\mathcal{L}_{\mathrm{cc}}$ durch die Masseneigenfelder der Quarks und Leptonen aus. Erklären Sie, wie die Quark-Mischungsmatrix (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix) zustande kommt.

19.23. Wieviele *physikalische* Parameter treten in der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix auf? Erläutern Sie Ihre Antwort.

19.24. Schreiben Sie jenen Teil $\mathcal{L}_{\mathrm{nc}}$ der Lagrangedichte des Standardmodells an, der die Kopplung des neutralen schwachen Stroms an das $Z^0$-Boson beschreibt. Drücken Sie $\mathcal{L}_{\mathrm{nc}}$ durch die Masseneigenfelder der Quarks und Leptonen aus. Erklären Sie den Glashow-Iliopoulos-Maini-Mechanismus.

19.25. Wie wirkt eine CP-Transformation auf ein Diracfeld $\psi(x^0, \vec{x})$?

19.26. Schreiben Sie das invariante Matrixelement für den Zerfall $\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ an (Baumgraphennäherung).

20. Zerfallsbreite

20.1. Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem invarianten Matrixelement und der Zerfallsbreite bei einem $n$-Teilchen-Zerfall?

20.2. Schreiben Sie das invariante Matrixelement für den Zerfall $\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ an (Baumgraphennäherung).

20.3. Berechnen Sie die Zerfallsbreite von $W^+ \to \nu_\ell \ell^+$ in Baumgraphennäherung ($m_\nu = 0$).

20.4. Berechnen Sie die Zerfallsbreite von $W^+ \to ud$ in Baumgraphennäherung ($m_u = m_d = 0$). Beachten Sie den Farbfaktor!

21. Minimale Subtraktion

21.1. Beschreiben Sie das Verfahren, wie man zu einer Größe $X$, welche in dimensionaler Regularisierung einen einfachen Pol bei $d = 4$ besitzt, $X_{\mathrm{ren}}$ im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema erhält.

21.2. Beschreiben Sie das Verfahren, wie man zu einer aus einer $L$-Schleifen-Rechnung erhaltenen Größe $X$ den dazugehörigen Ausdruck für $X_{\text{ren}}$ im $\overline{\text{MS}}$-Schema erhält.

21.3. Berechnen Sie

$$\Delta(0) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung und ermitteln Sie $\Delta(0)_{\text{ren}}$ im $\overline{\text{MS}}$-Schema.

22. Laufende Kopplung und laufende Masse

22.1. Der Zusammenhang zwischen der physikalischen und der nackten Masse in der $\varphi^4$-Theorie ist in Einschleifennäherung durch

$$m_{\text{ph}}^2 = m^2 - \frac{i\lambda}{2}\Delta(0) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

gegeben. Ermitteln Sie die laufende Masse $m_{\text{ren}}^2(\mu)$.

23. Renormierungsgruppe

23.1. Die Störungsreihe für die $\beta$-Funktion der $\varphi^4$-Theorie lautet

$$\beta(\lambda) = \beta_0 \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} + \beta_1 \frac{\lambda^3}{(4\pi)^4} + \ldots .$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung, dass die Koeffizienten $\bar{a}_L$ in der Beziehung

$$\lambda_{\text{ren}} = \lambda_{\text{ph}} \left[ 1 + \bar{a}_1 \frac{\lambda_{\text{ph}}}{(4\pi)^2} + \bar{a}_2 \frac{\lambda_{\text{ph}}^2}{(4\pi)^4} + \ldots \right]$$

Polynome vom Rang $L$ in der Variablen $t = \ln(\mu/m_{\text{ph}})$ sind:

$$\bar{a}_L = \bar{a}_{L,0} t^L + \bar{a}_{L,1} t^{L-1} + \ldots + \bar{a}_{L,L}.$$

Zeigen Sie weiters, dass der führende Term durch

$$\bar{a}_{L,0} = (\beta_0)^L$$

gegeben ist.

23.2. Berechnen Sie eine Näherungslösung der Renormierungsgruppengleichung

$$\mu \frac{d}{d\mu} \lambda_{\text{ren}}(\mu) = \beta(\lambda_{\text{ren}}(\mu))$$

für $\beta(\lambda) \simeq \beta_0 \lambda^2/(4\pi)^2$. Welche physikalische Bedeutung hat die dabei auftretende Integrationskonstante?

24. Funktionalmethoden

24.1 Betrachtet werde eine Quantenfeldtheorie mit einem reellen Skalarfeld $\phi$. Welche Beziehungen bestehen zwischen dem erzeugenden Funktional $Z[J]$ aller n-Punkt-Funktionen von $\phi$, dem erzeugenden Funktional W[J] der zusammenhängenden Greenfunktionen und dem erzeugenden Funktional $\Gamma[\bar{\phi}]$ der 1-Teilchen-irreduziblen Greenfunktionen?