

Kapitel 6: Dirac-Gleichung

Historisch:

→ ursprüngliches Ziel: ^{relativistische} Schrödinger-Gleichung mit d. Eigenschaften

- * manifeste Lorentz-Invarianz
- * Gleichung 1. Ordnung in der Zeit (und auch im Raum)
- * positiv-definite Norm

(KG wurde anfangs nicht als relevante Wellengleichung betrachtet.)

→ Ergebnis: Dirac-Gleichung

= relativ. Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen mit spin $1/2$

6.1. Herleitung der Dirac-Gleichung

(ausgesichtsreicher)

- * "phänomenologischer Zugang": Wir machen einen Ansatz, der obige Bedingungen erfüllt und leiten die Eigenschaften, Behauptungen, Interpretation ab.

Ansatz: ($\rightarrow$ Gleichung 1. Ordnung)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = H \psi(x) = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m) \psi(x), \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

1. Einschränkung: $\vec{\alpha}, \beta$: hermitesche Matrizen, da H hermitisch sein muß.

→ Wir wollen, daß das Korrespondenzprinzip gültig ist

$$E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \leftrightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad , \quad E^2 \leftrightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

und die E-p-Relation $E^2 = p^2 + m^2$ realisiert wird

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m) \psi = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

Annahme: $\vec{\alpha}, \beta$ x-unabhängig ("Einfachheitsprinzip")

$$= (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m)^2 \psi \stackrel{!}{=} (p^2 + m^2) \psi$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (\alpha^i \vec{p}^i + \beta u)^2 &= \beta^2 u^2 + \alpha^i \beta p^i u + \beta \alpha^i p^i u + \alpha^i \alpha^j p^i p^j \\
 &= \beta^2 u^2 + (\alpha^i)^2 (p^i)^2 + \{ \beta, \alpha^i \} p^i u + \frac{1}{2} \{ \alpha^i, \alpha^j \}_{i+j} p^i p^j \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad (\alpha^1)^2 (p^1)^2 + (\alpha^2)^2 (p^2)^2 + (\alpha^3)^2 (p^3)^2 \\
 &= (p^i)^2 + u^2
 \end{aligned}$$

2. Einschränkung: $\vec{\alpha}, \beta$ müssen folgende Relationen erfüllen:

$$\begin{aligned}
 \beta^2 - (\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2 - (\alpha^3)^2 &= 1 \\
 \{ \beta, \alpha^i \} = \{ \alpha^i, \alpha^j \}_{i+j} &= 0 \quad \text{für alle } i=1,2,3
 \end{aligned} \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Man kann zeigen ^{daß} α^i, β mindestens 4×4 Matrizen (spurlos + hermitisch + antikommutierend)

Rein wissen.

$\Rightarrow$ 4 hat mindestens 4 Komponenten

Herleitung der Eigenschaften

Lemma 1: $\text{Tr}[\beta] = \text{Tr}[\alpha^i] = 0$.

Beweis: $\{ \beta, \alpha^i \} = \beta \alpha^i + \alpha^i \beta = 0 \Leftrightarrow \beta \alpha^i \beta^{-1} = -\alpha^i$

$$\Rightarrow \text{Tr}[\beta \alpha^i \beta^{-1}] = \text{Tr}[\beta^{-1} \beta \alpha^i] = \text{Tr}[\alpha^i] = -\text{Tr}[\alpha^i]$$

$$\Rightarrow \text{Tr}[\alpha^i] = 0 \quad \text{für jedes } i$$

$$\text{analog gilt auch } \text{Tr}[\beta] = 0 \quad \square$$

Lemma 2: α^i, β haben Eigenwerte ± 1

Bew: α^i, β hermitisch $\Rightarrow$ diagonalisierbar

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1 \Rightarrow \text{EW von } (\alpha^i)^2, \beta^2 \text{ sind } 1$$

$$\Rightarrow \text{EW von } \alpha^i, \beta : \pm 1 \quad \square$$

Lemma 3: Die Dimension der Matrizen α^i, β ist gerade.

Bew: $\text{Tr}[\alpha^i] = \text{Tr}[\beta] = 0$ 1. EW's von α^i, β : ± 1

$\Rightarrow \alpha^i, \beta$ haben gleiche Anzahl von $+1$ und -1 EW's

$\Rightarrow$ Dimension gerade $\square$

Lemma 4: Die Dimension der Matrizen α^i, β ist ≥ 2

Bew: Annahme: n Dimensionen
(gerade)

$\Rightarrow$ es gibt n^2 unabh. hermit. Matrizen
eine davon ist die Einheitsmatrix (In einer best. Basis)

$\Rightarrow$ es gibt $n^2 - 1$ unabh. & spurlos hermit. Matrizen
(gerade)

$n=2$: $n^2 - 1 = 3 \rightarrow$ reicht nicht!

$n \geq 4$: $n^2 - 1 \geq 15 \rightarrow$ klappt! $\square$

* Für die DG nehmen wir weiter den einfachsten Fall ($n=4$)
an ("Einfachheitstheorem") $\rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

* Es gibt verschiedene Basen bzgl. denen α^i, β dargestellt werden können.

z.B. Dirac-Darstellung $\leftarrow$ Wir benutzen diese
Majorana - " -
Chirale - " -

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^i: \text{Pauli-Matrizen}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* Die DG nimmt eine für die Lorentzkovarianz günstige Form an, wenn man

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m) \psi$$

auf beiden Seiten mit β multipliziert.

$$\rightarrow \left(i \frac{\partial}{\partial t} \beta - \beta \alpha^i \vec{p}^i - m \right) \psi = 0$$

$$p^\mu = (p_0, p^i) \Leftrightarrow \left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

$$p_\mu \Leftrightarrow i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad x^\mu = (t, x^i)$$

Definition d. Gamma-Matrizen γ^μ

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \beta \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

→ Beachte: Die γ^μ -Gamma-Matrizen bilden für sich keine 4-er-Vektor; Sie haben in jedem Bezugssystem dieselbe Form.

Die Eigenschaften der γ -Matrizen sind aber wichtig für die Kovarianzeigenschaften der Dirac-Theorie.

→ Gleichungen (*) können kompakt geschrieben werden:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

Antikommutatorrelation der Γ -Matrizen

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m)\psi = (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0$$

"kovariante"

Dirac-Gleichung

ψ : Dirac-Wellenfunktion

Form richtig in jedem Bezugssystem (Invariant)

sind für Ausrechnungen leichter benutzt

Wechselwirkung mit dem e.m. Feld

Eichinvarianz: $\psi(x) \rightarrow e^{iq\Lambda(x)} \psi(x)$

$$p^\mu \rightarrow \mathcal{D}^\mu = p^\mu - qA^\mu = i(\partial^\mu + iqA^\mu) \quad \text{mit } A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \Lambda$$

$$\Rightarrow \left[i\partial_\mu \psi = H\psi = \left[\vec{\gamma} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) + qA^0 + \beta m \right] \psi \right. \\ \left. \text{oder: } \left[\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m \right] \psi = \left[\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m \right] \psi = 0 \right]$$

Feynman'sche "Slash"-Schreibweise

"kovariante" Kontraktion v. Γ -Matrix mit einem 4-Vektor

$$A^\mu: 4\text{-Vektor} \rightarrow \not{A} := \gamma^\mu A_\mu = \gamma_\mu A^\mu$$

freie Dirac-Gl: $(i\not{\partial} - m)\psi = (\not{p} - m)\psi = 0$

DG im e.m. Feld: $(i\not{\mathcal{D}} - m)\psi = (\not{p} - q\not{A} - m)\psi = 0$

Erhaltener Strom

- nur für den freien Fall
- Ziel: Norm & Skalarprodukt (u.a.)

Es seien ψ_a, ψ_b Lsg'eu der DG $\Rightarrow i\partial_t \psi_a = H\psi_a$

$$\Rightarrow \psi_a^\dagger i\partial_t \psi_b = \psi_a^\dagger H \psi_b, \quad (-i\partial_t \psi_a)^\dagger \psi_b = (H\psi_a)^\dagger \psi_b$$

$$\Rightarrow i\partial_t (\psi_a^\dagger \psi_b) = -i\psi_a^\dagger \vec{x} \cdot \left(\vec{\nabla} \psi_b + \vec{\nabla} \psi_b \right)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} (\psi_a^\dagger \psi_b) + i\frac{\partial}{\partial x^i} (\psi_a^\dagger x^i \psi_b) = 0$$

$$\Leftrightarrow i\frac{\partial}{\partial x^\mu} [\psi_a^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi_b] = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$$

Bemerkung: Die Kombination $\psi^\dagger \gamma^0$ tritt sehr oft auf.

Definition:

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$$

"Adjungierte Dirac-Wellenfunktion"

Zu klärenden Fragen für die DG:

- * Was genau stellt ψ dar? $\rightarrow$ Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen (z.B. Elektron)
- * Wie transformiert ψ unter LT'en? $\rightarrow$ Kovarianz explizit
- * Ist $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ überhaupt ein 4-Vektor?
- * Beschreibt die DG den wichtigsten nicht-rel. Limit? $\rightarrow$ Pauli-Gleichung (s. QM I)

Mit dem Gauss'schen Satz können wir ableiten:

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi_a^\dagger(\vec{x}, t) \psi_b(\vec{x}, t) = 0$$

$$\Rightarrow \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad \text{Norm}$$

$$\int d^3x \psi_a^\dagger \psi_b \quad \text{Skalarprodukt}$$

unabh. v. d. Zeit

aber: nicht Lorentz-invariant,
da 0-Komponente eines 4-Vektors

6.2. Lösungen der freien Dirac-Gleichung

- Wir benutzen, was wir bereits bei der KG-Gleichung haben (→ Teilchen & Antiteilchen)
- Wir benutzen die Konventionen & Interpretationen, die wir bei der KG benutzt haben (→ Feynman-Hellberg)

Physikal. Objekt:	Theorie
Teilchen (z.B. e^-) mit $p^\mu = (E, \vec{p})$ u. Spin s	$\psi_{\vec{p},s}^{(+)}(\vec{x},t) = N_p e^{-ip \cdot x} u(\vec{p},s)$ Teilchen mit Energie $E (>0)$, Impuls $\vec{p}$, Spin s
Antiteilchen (z.B. e^+) mit $p^\mu = (E, \vec{p})$ u. Spin s	$\psi_{\vec{p},s}^{(-)}(\vec{x},t) = N_p e^{+ip \cdot x} v(\vec{p},s)$ Teilchen mit Energie $-E (<0)$, Impuls $-\vec{p}$, Spin s

Lösungen mit pos. Energie → Teilchen

$$X, \eta = \begin{pmatrix} a_{X,\eta} \\ b_{X,\eta} \end{pmatrix} \text{ Spindeln}$$

Ausatz: $\psi_{\vec{p},s}^{(+)}(\vec{x}) = N_p e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} X \\ \eta \end{pmatrix}$, $p^\mu = (E_p, \vec{p})$

Einsetzen $\rightarrow E_p e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} X \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -i \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ i \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \eta \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}$

$$\Rightarrow E_p X = m X + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \eta$$

$$E_p \eta = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} X - m \eta$$

$$\Rightarrow \eta = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \right) X$$

(Übung)

$$\begin{aligned} E_p^2 X &= m E_p X + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} E_p \eta \\ &= m^2 X + m \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \eta + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 X - m (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \eta \\ &= (m^2 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2) X \\ &= (m^2 + p^2) X \end{aligned}$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = +i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{\sigma}^i \vec{\sigma}^j = i \epsilon^{ijk} \vec{\sigma}^k + \delta^{ij} \mathbb{1}$$

Definition: $u(\vec{p},s) := \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} X(s) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} X(s) \end{pmatrix}$

Teilchen-Zustand mit
"Dirac-Spinor für Energie E_p , Impuls $\vec{p}$, Spin s "

$X(s)$: Spinor für ein Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen

Normierung: $\delta_{ss'}^{(3)} \stackrel{!}{=} \int d^3x \psi_{\vec{p},s}^{(+)\dagger} \psi_{\vec{p}',s'}^{(+)} = N^2 (E_p + m) X_s^\dagger \left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')}{(E_p + m)^2} \right) X_{s'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') (2\pi)^3$

(für $\vec{p} = \vec{p}'$)

$$= N^2 (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'} \text{ mit } X_s^\dagger X_{s'} = \delta_{ss'}$$

$$\Rightarrow N_p = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}}$$

[Erinnerung: Quantisierung in z-Richtung in nichtrel. QM
 $\rightarrow \chi(+\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi(-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$]

Lösungen mit negat. Energie $\rightarrow$ Antiteilchen

Bemerkung: Wir könnten mit dem obigen Ansatz anfangen, aber
 dann wird die Darstellung des Antiteilchenes nicht klar.
 $\rightarrow$ Wir gehen anderen Weg.

$\rightarrow$ Wir konstruieren die Lsg'en mit negat. Energie aus
 den Lsg'en positiver Energie in der ladungskongjugierten Theorie
 (= Theorie in der Antiteilchen als Teilchen
 betrachtet wird.)

• In der ladungskongjugierten Theorie: $\psi_{\vec{p},s} = N_p e^{-ipx} u(\vec{p},s)$, Ladung: $-q$

$$\rightarrow \text{es gilt: } [i\gamma^\mu \partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m]\psi_{\vec{p},s} = 0$$

• Konstruktion der ladungskongjugationsauf.: $\left. \begin{array}{l} \text{komplex konj. } ()^* \\ \text{multipliziere mit } C \text{ von links} \end{array} \right\}$

$$\begin{aligned} & [-i\gamma^{\mu*} \partial_\mu + q\gamma^{\mu*} A_\mu - m]\psi_{\vec{p},s}^* \\ C := i\gamma^2, \quad C^\dagger = C^T = C^{-1} = -C, \quad C\gamma_\mu^* C^{-1} = -\gamma_\mu \\ & [i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m]C\psi_{\vec{p},s}^* \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Def: ladungskongjugation (hier!)

Lösung mit neg. Energie
 (wir setzen eine mögliche Phase = 1)

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{p},s}^{(-)} &= C\psi_{\vec{p},s}^* = \tilde{N}_p e^{+ipx} i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(s)^* \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi(s)^* \end{pmatrix} = \tilde{N}_p e^{+ipx} \begin{pmatrix} i\sigma^2 \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi(s)^* \\ -i\sigma^2 \chi(s)^* \end{pmatrix} \\ &= \tilde{N}_p e^{+ipx} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} (-i\sigma^2 \chi(s)^*) \\ (-i\sigma^2 \chi(s)^*) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = -\sigma^i \sigma^2$

$$\text{Definition: } v(\vec{p},s) := \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} (-i\sigma^2 \chi(s)^*) \\ (-i\sigma^2 \chi(s)^*) \end{pmatrix}$$

Antiteilchen
 Dirac spinor für Zustand mit Energie E_p , Impuls $\vec{p}$, Spin s

Beachte: $-i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -i\sigma^2 \chi(+\frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -i\sigma^2 \chi(-\frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} (-i\sigma^2) \text{ macht, was} \\ \text{es machen soll} \end{array} \right\}$

Ladungskonjugationstransformation: $\psi(x) \rightarrow \psi^c(x) = i\gamma^2 \psi^*(x)$
für Dirac Spinoren

modulophasen

$$(\psi_{p,s}^{(+)})^c = \psi_{p,s}^{(-)} \quad (\text{analog zur KGR})$$

$$(\psi_{p,s}^{(-)})^c = \psi_{p,s}^{(+)}$$

Normierung & Orthogonalität

→ positive Norm auch für Zustände negativer Energie

$$\int d^3x (\psi_{\vec{p},s}^{(+)})^\dagger \psi_{\vec{p}',s'}^{(+)} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{ss'}$$

$$\int d^3x (\psi_{\vec{p},s}^{(+)})^\dagger \psi_{\vec{p}',s'}^{(-)} = \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{p}'}{E_p + m} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}'}{E_{p'} + m} \right) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}') = 0$$

Form einer allgem. freien Lsg.

$$\psi(x) = \int d^3\vec{p} \sum_{\pm s} \left[a_+(\vec{p},s) \psi_{\vec{p},s}^{(+)}(x) + a_-(\vec{p},s) \psi_{\vec{p},s}^{(-)}(x) \right]$$

$$\left[\Rightarrow \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = \sum_{\pm s} \int d^3\vec{p} (|a_+(\vec{p},s)|^2 + |a_-(\vec{p},s)|^2) \right]$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[a_+(\vec{p},s) u(\vec{p},s) e^{-ipx} + a_-(\vec{p},s) v(\vec{p},s) e^{+ipx} \right]$$

Vollständigkeit:

$$\int d^3\vec{p} \sum_{\pm s} \left[\psi_{\vec{p},s}^{(+)}(x) \psi_{\vec{p},s}^{(+)\dagger}(x') + \psi_{\vec{p},s}^{(-)}(x) \psi_{\vec{p},s}^{(-)\dagger}(x') \right] = 11 \delta^{(4)}(x-x')$$

zu "Ladungskonjugation": (c)

$$a, b \in \mathbb{C}$$

* C ist linear und unitär

$$(a\psi + b\psi')^c \rightarrow a\psi^c + b\psi'^c$$

* Photonfeld: $A^\mu \rightarrow (A^\mu)^c = -A^\mu$

(Diese Operation wurde bei der Herleitung für Dirac Wellenfunktionen nicht benutzt, aber sie gehört zur QFT-Definition von C
→ Invarianz der QFT-Wirkung unter C soll explizit sein, da z.B. QED, QCD C -invariant sind.)

6.3. Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung

- Grundlage für Konstruktion einer Lorentz-invarianten Theorie für Teilchen mit spin: Form der Lorentztransformation eines Dirac-Spinors
- Wir müssen die Darstellung für $L^\uparrow$, T und P für Dirac-Spinoren herleiten
 - "Spinordarstellung von $L^\uparrow$, T , P " ($L^\uparrow$: orthochrone (usual) LT im Elementarraum)
- * Die Spinordarst.^{ten} von $L^\uparrow$ sind die Fundamentaldarstellung^{en} von $L^\uparrow$, jede Darstellung kann aus Tensorprodukten von Fundamentaldarstellungen zusammengesetzt werden.
- * Spinordarstellung $\neq$ Darstellung für 4-Vektoren (z.B. p^μ, x^μ)

Herleitung für Transformationen aus $L^\uparrow$

Wir verlangen Lorentz-invarianz:

Bezugssystem 1:
$$\left[\gamma^\mu (p_\mu - e A_\mu(x)) - m \right] \psi(x) = 0$$



$$x' = \Lambda x, \quad A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(x) = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(\Lambda^{-1}x')$$

$$[(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \Leftrightarrow (x')_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x_\nu \text{ für jeden 4-Vektor } x]$$

Erinnerung →

Exercise

Wir setzen folgende Form an →

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x')$$



Bezugssystem 2:
$$\left[\gamma^\mu (p'_\mu - e A'_\mu(x')) - m \right] \psi'(x') = 0$$

$$= \left[\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu (p_\nu - e A_\nu(x)) - m \right] S(\Lambda) \psi(x)$$

Multipl. mit $S^{-1}(\Lambda)$ von links, um in die Form v. Bez. syst. 1 zu überführen

$$\begin{aligned} \Rightarrow S^{-1}(\Lambda) \left[\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu (p_\nu - e A_\nu(x)) - m \right] S(\Lambda) \psi(x) \\ = \left[\underbrace{(S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda))}_{\gamma^\mu} (\Lambda^{-1})^\nu_\mu (p_\nu - e A_\nu(x)) - m \right] \psi(x) = 0 \\ = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu (S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda)) \stackrel{!}{=} \gamma^\nu \end{aligned}$$

→ Bedingung an $S(\Lambda)$: $S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$ (*)

Ansatz:
(wie üblich bei
Lie-Gruppe)

$$S(\Lambda) = \exp \left[-\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \right] \quad S^{\alpha\beta} = i \tilde{S}^{\alpha\beta}$$

$$= \exp \left[\frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \tilde{S}^{\alpha\beta} \right]$$

↑
Generatoren

↑
siehe Darstellung von Λ^μ_ν

⊕ Aus (*) und der Darstellung von Λ^μ_ν kann man ableiten (Übung)

$$S^{\alpha\beta} = \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \quad \rightarrow \quad \tilde{S}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$$

→ $S^{\alpha\beta} = -S^{\beta\alpha} \rightarrow$ o. Bgl. A.: $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ (antisym.)

→ 6 freie Parameter

⊕ 3 Parameter für räuml. Drehungen

3 Parameter für Boosts

→ $\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{0i} \\ \omega_{i0} & \omega_{ij} \end{pmatrix}$

↖ Boost
↗ Drehung

Räumliche Drehungen: $\omega_{ij} = \Theta \epsilon_{ijk}$ $\epsilon^{123} = \epsilon_{123} = 1$

Drehung um Θ um die k -Achse

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{4} (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i) \quad \gamma^i = \beta \alpha^i$$

$$= \frac{i}{4} (\beta \alpha^i \beta \alpha^j - \beta \alpha^j \beta \alpha^i) = \frac{i}{4} (-\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{i}{4} \begin{pmatrix} [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} \quad [\sigma^i, \sigma^j] = 2i \epsilon^{ijk} \sigma^k$$

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \gamma^5 \alpha^k$$

"Generator für Drehungen"

Definition: $\gamma^5 = \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

"Dirac- γ_5 -Matrix"

Es gilt: $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

$\epsilon_{ijk} \epsilon_{jkl} = 2 \delta_{ik}$

Lorentz-Boosts: $\boxed{\omega_{aj} = -\omega_{ja} = \beta_j}$ $|\beta_j|$: "Rapidityparameter"

"Boost mit Geschw. $v = \tanh(\beta_j)$
in j -Richtung"

$$S^{0i} = -S^{i0} = \frac{1}{4} [x^0, x^i] = \frac{1}{4} (x^0 x^i - x^i x^0) = \frac{1}{4} (\beta x^i - \beta x^i)$$

$$\boxed{S^{0i} = \frac{1}{2} x^i}$$

$$\Rightarrow \text{Allgemeine Lorentztransf.: } S(\Lambda(\vec{0}, \vec{\beta})) = \exp \left[\frac{1}{2} \vec{\beta} \cdot \vec{S} - \frac{i}{2} \gamma^5 \vec{0} \cdot \vec{S} \right]$$

Eigenschaften

* $(S^{ij})^\dagger = S^{ij} \Rightarrow$ Drehgeneratoren hermitisch

$$\Rightarrow S(\Lambda(\vec{0}, 0))^\dagger = \exp \left[+\frac{1}{2} \vec{0}^\dagger \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \right] = \exp \left[-\frac{1}{2} (-\vec{0}^\dagger) \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \right] \\ = S(\Lambda(-\vec{0}, 0)) \Rightarrow \text{Drehoperator unitär}$$

verg. univ. !
→ non-compact
group

* $(S^{0i})^\dagger = -S^{0i} \Rightarrow$ Boostgeneratoren antihermitisch

$$\Rightarrow S(\Lambda(0, \vec{\beta}))^\dagger = S(\Lambda(0, \vec{\beta})) \Rightarrow \text{Boostoperator hermitisch}$$

* $|\det[S(\Lambda(\vec{0}, \vec{\beta}))]| = 1 \Rightarrow S(\Lambda)$ sind unimodular

* Kommutatorrelationen: (hier: $i, j, k, \beta \in \{1, 2, 3\}$!)

$$[S^{ij}, S^{kl}] = \frac{1}{4} e^{ijk} e^{klm} \left(\begin{pmatrix} \sigma^k & \sigma^l \\ 0 & \sigma^k & \sigma^l \end{pmatrix} - \dots \right) = 2i e^{ijkm} \frac{1}{4} e^{lmn} \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & \sigma^m \end{pmatrix} \\ = i e^{ijk} e^{klm} S^{mn}$$

$$[S^{ij}, S^{k0}] = \frac{1}{2} e^{ijk} \left(\frac{1}{2} \right) \left[\begin{pmatrix} \sigma^k & \sigma^l \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} - \dots \right] = -\frac{1}{4} e^{ijk} \begin{pmatrix} 0 & [\sigma^k, \sigma^k] \\ [\sigma^k, \sigma^k] & 0 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} e^{ijk} e^{klm} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \\ = -i e^{ijk} e^{klm} S^{lm}$$

$$[S^{k0}, S^{l0}] = -\frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^l \\ \sigma^l & 0 \end{pmatrix} - \dots \right] = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} [\sigma^k, \sigma^l] & 0 \\ 0 & [\sigma^k, \sigma^l] \end{pmatrix} \\ = -\frac{1}{2} e^{klm} \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & \sigma^m \end{pmatrix} = -i S^{lm}$$

→ verschiedene Generatoren kommutieren nicht miteinander
→ nur parallele LTen kommutieren miteinander

(z.B. Boost in dieselbe Richtung
Drehungen um dieselbe Richtung)

Explizite Form der LTen im Dirac-Raum

Räuml. Drehung $\boxed{\vec{\Theta} = \Theta \vec{n}} \quad n^2 = 1$

bekannt aus QM I: Drehoperator für einen Spinor:

$$S(\vec{\Theta}) = \exp\left(-\frac{i}{2} \Theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma}\right) = 1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{i}{2} \Theta\right)^{2i}}{(2i)!} + (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{i}{2} \Theta\right)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$= \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) 1 - i \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad S^{-1}(\vec{\Theta}) = S(-\vec{\Theta}) = S^\dagger(\vec{\Theta})$$

$$\hookrightarrow S(\Lambda(\vec{\Theta}, 0)) = \exp\left[-\frac{i}{2} \gamma^5 \vec{\Theta} \cdot \vec{\alpha}\right] = \exp\left[-\frac{i}{2} \Theta \begin{pmatrix} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} S(\vec{\Theta}) & 0 \\ 0 & S(\vec{\Theta}) \end{pmatrix} = \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) 1 - i \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \begin{pmatrix} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Drehungsspinor

$$S(\Lambda(\vec{\Theta}, 0)) u(\vec{p}, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} S(\vec{\Theta}) \chi(s) \\ S(\vec{\Theta}) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi(s) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{gedrehter Spinor bekannt} \\ \text{aus QM I} \end{array} \quad S(\vec{\Theta}) \chi(s) =: \chi(s')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(\vec{\Theta}) \vec{\sigma} \vec{p} = S(\vec{\Theta}) \vec{\sigma} \vec{p} S(-\vec{\Theta}) S(\vec{\Theta}) \\ S(\vec{\Theta}) (\vec{\sigma} \vec{p}) S(-\vec{\Theta}) = \left[\left(\cos\frac{\Theta}{2} - i \sigma_z \sin\frac{\Theta}{2} \right) \vec{\sigma} \vec{p} \left(\cos\frac{\Theta}{2} + i \sigma_z \sin\frac{\Theta}{2} \right) \right] \quad \text{Bsp: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \sigma_z p_z + \sigma_x (p_x \cos\Theta - p_y \sin\Theta) + \sigma_y (p_y \cos\Theta + p_x \sin\Theta) \\ = \vec{\sigma} \vec{p}' \quad \text{um } \vec{\Theta} \quad \leftarrow \text{QM I} \\ \quad \quad \quad \text{gedrehter Impuls} \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow S(\Lambda(\vec{\Theta}, 0)) u(\vec{p}, s) = u(\vec{p}', s') = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \chi(s') \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E_p + m} \chi(s') \end{pmatrix}$$

Beispiel: Antiteilchenspinor

$$S(\Lambda(\vec{\Theta}, 0)) v(\vec{p}, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E_p + m} S(\Theta) (-i \sigma^2 \chi^*(s)) \\ S(\Theta) (-i \sigma^2 \chi^*(s)) \end{pmatrix} \quad \sigma^1 \sigma^2 = -\sigma^2 \sigma^1$$

$$= \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E_p + m} (-i \sigma^2) (S(\Theta) \chi(s))^* \\ (-i \sigma^2) (S(\Theta) \chi(s))^* \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E_p + m} (-i \sigma^2) \chi^*(s') \\ (-i \sigma^2) \chi^*(s') \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow S(\Lambda(\vec{\Theta}, 0)) \psi_{p,s}^{(\pm)} = \psi_{p',s'}^{(\pm)}$$

Boosts: $\vec{\beta} = \beta \vec{u} \quad u^2 = 1$

$$(\vec{\beta} \vec{x})^2 = \beta^2 x^2 =$$

$$\begin{aligned} S(\Lambda(0, \vec{\beta})) &= \exp \left[\frac{\vec{\beta} \vec{x}}{2} \right] = 1 + \frac{\vec{\beta} \vec{x}}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\vec{\beta} \vec{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\vec{\beta} \vec{x}}{2} \right)^3 + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^4 + \dots \right) + \vec{u} \vec{x} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^3 + \dots \right) \\ &= \cosh \left(\frac{\beta}{2} \right) 1 + \sinh \left(\frac{\beta}{2} \right) \vec{u} \vec{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh \beta &= \frac{\sqrt{u^2 + p^2}}{u} = \frac{E_p}{u}, \quad \tanh \beta = v, \quad \sinh \beta = \frac{p}{u} \\ &= \sinh^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) + \cosh^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) &= 2 \cosh \left(\frac{\beta}{2} \right) \sinh \left(\frac{\beta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh \beta + 1}{2}} = \sqrt{\frac{E_p + u}{2u}} & \tanh \frac{\beta}{2} &= \frac{p}{E_p + u} \\ \sinh \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh \beta - 1}{2}} = \sqrt{\frac{E_p - u}{2u}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(\Lambda(0, \vec{\beta})) = \sqrt{\frac{E_p + u}{2u}} \left(1 + \frac{p}{E_p + u} \vec{u} \vec{x} \right) = \sqrt{\frac{E_p + u}{2u}} \left(1 + \frac{\vec{\beta} \vec{x}}{E_p + u} \right)$$

Boost für Spinoren in Ruhe

$$\rightarrow S(\Lambda(0, \vec{\beta})) u(0, s) = \sqrt{\frac{E_p + u}{2u}} \sqrt{2u} \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \frac{u}{E_p + u} \chi(s) \end{pmatrix} = u(p, s)$$

$$S(\Lambda(0, \vec{\beta})) v(0, s) = v(p, s)$$

$$\Rightarrow S(\Lambda(0, \vec{\beta})) \varphi_{0,s}^{(\pm)}(x) = \sqrt{\frac{E_p}{u}} \varphi_{\vec{p},s}^{(\pm)}(x)$$

- kommt später nochmal
- Die Norm für Dirac Wellenfunktionen basierend auf $\int d^3x \psi^\dagger \psi$ ist nicht Lorentz-invariant.
 - Norm ist die 0-Komponente einer 4-Stroms

→ fest: aktive Transformation!

ParitätsTransformation→ e.m. Wechselwirkung } invariant unter P
Starke - a -

$$\Lambda^\mu_\nu(\text{Parität}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

→ Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\phi(t, \vec{x}))^P = c \phi(t, -\vec{x})$$

oft
wird ~~immer~~ $c=1$ gesetzt
→ c beliebige Phase, $|c|^2=1$

KG ist invariant unter P:

$$\Rightarrow A^0(t, \vec{x}) \rightarrow A^0(t, -\vec{x}), \quad A^i(t, \vec{x}) \rightarrow -A^i(t, -\vec{x})$$

→ Spin:



P



Spin bleibt unverändert unter P

ParitätsTransformation für die DG

$$\text{Bedingung (*)}: \quad S^\mu(\Lambda(P)) \gamma^0 S(\Lambda(P)) = \gamma^0$$

$$S^\mu(\Lambda(P)) \gamma^i S(\Lambda(P)) = -\gamma^i$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\Lambda(P)) = c \gamma^0}$$

c : phase, $|c|^2=1$
(wird $c=1$ gesetzt)

ParitätsTransformation für Dirac-Feldern

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow (\psi(t, \vec{x}))^P = c \gamma^0 \psi(t, -\vec{x})$$

$$* \text{ P ist linear und unitär } (a\psi + b\psi')^P = a\psi^P + b\psi'^P$$

$$* \text{ Photonfeld: } \begin{cases} A^0(t, \vec{x}) \rightarrow A^0(t, -\vec{x}) \\ A^i(t, \vec{x}) \rightarrow -A^i(t, -\vec{x}) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^\mu(x) \rightarrow \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x') \end{array} \right.$$

Zeitumkehrtransformation

→ Quantenfeldtheorievorlesung

6.4. Bilineare Kovarianten

→ Die Dirac-Theorie ist Lorentz-kovariant

↳ Anwenden für physikal. Prozesse mit Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen können aus Matrixelementen im Dirac-Raum konstruiert werden, die als 4-Tensoren transformieren
⇒ "Bilineare Kovarianten"

Beachte: $S(\Lambda(\text{Drehung}))^\dagger = S^\dagger(\Lambda(\text{Drehung})) \Rightarrow$ unitär
 $S(\Lambda(\text{Boost}))^\dagger = S(\Lambda(\text{Boost})) \Rightarrow$ hermitisch

$$\begin{aligned} \rightarrow \psi^\dagger(x) \psi(x) &\xrightarrow{\text{Boost}} (S(\Lambda_{\text{Boost}}) \psi(x))^\dagger S(\Lambda_{\text{Boost}}) \psi(x) = \psi^\dagger(x') \psi(x') \\ &= \psi^\dagger(x) S^\dagger(\Lambda_{\text{Boost}}) \psi(x) \\ &\neq \psi^\dagger(x) \psi(x) \end{aligned}$$

Die Norm ist nicht Lorentz-invariant (kein Lorentz-Skalar)

→ Folgende Eigenschaften sind für die Identifizierung der Bilinearen Kovarianten nützlich

■ $\gamma^i \gamma^j \gamma^0 = -\gamma^j \gamma^0 \gamma^i = \gamma^0 \gamma^j \gamma^i$ für alle $i, j = 1, 2, 3$

⇒ $[\gamma^i, \gamma^j] \gamma^0 = \gamma^0 [\gamma^i, \gamma^j]$

⇒ $\begin{cases} S(\Lambda_{\text{Drehung}}) \gamma^0 = \gamma^0 S(\Lambda_{\text{Drehung}}) \\ S^\dagger(\Lambda_{\text{Drehung}}) \gamma^0 = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda_{\text{Drehung}}) \end{cases} \quad (\gamma^{0\dagger} = \gamma^0)$

■ $\gamma^i \gamma^0 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i \gamma^0$ für alle $j = 1, 2, 3$

⇒ $[\gamma^0, \gamma^i] \gamma^0 = -\gamma^0 [\gamma^0, \gamma^i]$

⇒ $S(\Lambda_{\text{Boost}}) \gamma^0 = S^\dagger(\Lambda_{\text{Boost}}) \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}(\Lambda_{\text{Boost}})$

Definition: $\bar{\psi}(x) := \psi^\dagger(x) \gamma^0$

"Adjungierte Dirac-Wellenfunktion"

Es gilt:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda) \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{\text{Dirac}} (S(\Lambda_{\text{Dirac}}) \psi(x))^{\dagger} \gamma^0 = \psi^{\dagger} S^{\dagger} \gamma^0 = \bar{\psi} S^{\dagger} = \bar{\psi} S^{-1}$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{\text{Bohr}} (S(\Lambda_{\text{Bohr}}) \psi(x))^{\dagger} \gamma^0 = \psi^{\dagger} S^{\dagger} \gamma^0 = \bar{\psi} S^{-1}$$

Es gilt: Alle $\bar{\psi}(x) \Gamma^{\alpha\beta\gamma\dots} \psi(x)$ sind 4-Lorentz-Tensoren
 bzgl. der Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
 ($\Gamma^{\alpha\beta\gamma} = \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \gamma^{\gamma} \dots$)

Beweis: (Übung) benutze $S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) = 1$, $S^{-1}(\Lambda) \gamma^{\mu} S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}$

⇒ Jedes Dirac-Matrixelement $\psi^{\dagger}(x) [\text{bel. Produkt v. } \gamma\text{-Matrizen}] \psi(x)$
 ist die Komponente eines 4-Lorentz-Tensors: $\bar{\psi}(x) \Gamma^{\alpha\beta\gamma\dots} \psi(x)$

⇒ aber: $\Gamma^{\alpha\beta\gamma\dots}$ ist eine komplexe 4×4 -Dirac Matrix
 und kann als Linearkombination (mit komplexen Koeff.)
 von 16 4×4 -Dirac-Matrizen geschrieben werden:

linear unabhängig:

(linear unabhängig)

$$1, \gamma^{\mu}, \gamma^{\mu\nu}, \gamma^5 \gamma^{\mu}, \gamma^5$$

(Beweis:
z.B. Jordan/Dall)

Bilineare Kovarianten:

Anzahl d. Matrizen

$\bar{\psi}(x) \psi(x)$	Skalar	1
$\bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x)$	Vektor	4
$\bar{\psi}(x) \gamma^{\mu\nu} \psi(x)$	antisymmetr. Tensor	6
$\bar{\psi}(x) \gamma^5 \gamma^{\mu} \psi(x)$	Axial-Vektor	4
$\bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x)$	Pseudoskalar	1

16

Definition:

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$$

C, P, T → discrete symmetries

all in the Dirac representation!
 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Parity: $a \psi(x) \rightarrow a \gamma^0 \psi(t, -\vec{x})$

possible phases set to 1

$a \bar{\psi}(x) \rightarrow a \bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0$

a : complex number or Dirac matrices, any matrix

→ linear transformation, unitary

$A^0(x) \rightarrow A^0(t, -\vec{x})$, $A^i(x) \rightarrow -A^i(t, -\vec{x})$

→ ^{1.s.} momentum reversed
 spin unchanged

~~eff~~ e.g. left-handed $e^- \rightarrow$ right-handed e^-

Time Reversal: $a \psi(x) \rightarrow -a^* \gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, \vec{x}) = a^* \gamma^3 \gamma^1 \psi(-t, \vec{x})$

$a \bar{\psi}(x) \rightarrow a^* \bar{\psi}(-t, \vec{x}) \gamma^1 \gamma^3$

$A^0(x) \rightarrow A^0(-t, \vec{x})$, $A^i(x) \rightarrow -A^i(-t, \vec{x})$

antilinear, unitary

→ momentum + spin reversed

$(\gamma^1)^* = \gamma^1$

$(\gamma^3)^* = \gamma^3$

$(\gamma^2)^* = -\gamma^2$

$(\gamma^2)^{\dagger} = -\gamma^2$

Charge Conjugation: $a \psi \rightarrow a i \gamma^2 \psi^* = a i (\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2)^T$

$a \bar{\psi} \rightarrow a i \psi^T \gamma^2 \gamma^0 = a i (\gamma^0 \gamma^2 \psi)^T$

$A^\mu \rightarrow -A^\mu$

→ linear, unitary

→ momentum unchanged, spin reversed e.g. left-handed $e^- \rightarrow$ left-handed e^+

SM is invariant under CPT. (any local, Lorentz-invariant, Hermitian theory is)

Unter Lorentztransformationen gilt $\mathcal{L}(1)$

$$\bar{\psi} \psi \rightarrow \bar{\psi} \psi$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$$

$$\bar{\psi} \gamma^{\mu\nu} \psi \rightarrow \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \bar{\psi} \gamma^{\alpha\beta} \psi$$

$$\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi \rightarrow \det(\Lambda) \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\nu \psi$$

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi \rightarrow \det(\Lambda) \bar{\psi} \gamma^5 \psi$$

$$\det(\Lambda \in L_+^\uparrow) = 1, \quad \det(P) = -1$$

Beachte:

$\bar{\psi} \gamma^0 \psi(x) = \psi^\dagger(x) \psi(x) \rightarrow$ nicht Lorentz-invariant
(da 0-Komponente eines 4-Vektors)
aber positiv definit für alle Zustände

$\bar{\psi}(x) \psi(x) \rightarrow$ Lorentz-Skalar

aber: > 0 für Zustände mit pos. Energie
 < 0 für Zustände mit negat. Energie

(siehe auch 1.1.1)

6.5 Propagator and Green's Functions

$$(i\cancel{\partial}_x - m) S_F(x, x') = i \delta^{(4)}(x - x')$$

$$\hookrightarrow S_F(x, x') = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \tilde{S}_F(q, q') e^{+iq'x'}$$

$$\tilde{S}_F(q, q') = \int d^4 x d^4 x' e^{+iqx} S_F(x, x') e^{-iq'x'}$$

$$\hookrightarrow (q - m) \tilde{S}_F(q, q') = i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - q')$$

Note: $(q - m)(q + m) = q^2 - m^2 = q^2 - m^2$

$$q^2 = \frac{1}{2} q_\mu q_\mu \underbrace{\{g^{\mu\nu}\}}_{2 \text{ gluv}} = q^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q - m} = \frac{q + m}{q^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow \tilde{S}_F(q, q') = \frac{i(q + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - q')$$

correct implementation of Feynman-Stückelberg

We have:

$$S_F(x, x') = \theta(t - t') \int d^3 \vec{q} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \psi_{\vec{q}, s}^{(+)}(x) \bar{\psi}_{\vec{q}, s}^{(+)}(x') + \theta(t' - t) \int d^3 \vec{q} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \psi_{\vec{q}, s}^{(-)}(x) \bar{\psi}_{\vec{q}, s}^{(-)}(x') \quad (\text{Exercise})$$

To derive this result the following important relation is used:

$$\begin{aligned} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} u(\vec{p}, s) \bar{u}(\vec{p}, s) &= \not{p} + m \\ \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} v(\vec{p}, s) \bar{v}(\vec{p}, s) &= \not{p} - m \end{aligned} \quad \text{"spin sum relations"}$$

6.6 S-matrix Elements for Scattering Processes

Consider: $(i\cancel{\partial}_x - m - V(x)) \psi(x) = 0 \Leftrightarrow (i\cancel{\partial}_x - m) \psi(x) = V(x) \psi(x)$

$$\hookrightarrow \psi(x) = \psi_{\text{free}}(x) - i \int d^4 x' S_F(x, x') V(x') \psi(x')$$

Particle Scattering:

Feynman propagator as time-evolution operator: $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

$$\int d^3 \vec{x}' S_F(x, x') \gamma^0 \psi_{\vec{k}, s}^{(+)}(x') = \theta(t - t') \psi_{\vec{k}, s}^{(+)}(x)$$

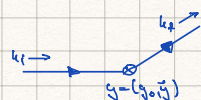
$$\int d^3 \vec{x}' \psi_{\vec{k}, s}^{(+)}(x') S_F(x', x) = \theta(t' - t) \bar{\psi}_{\vec{k}, s}^{(+)}(x)$$

4x4 matrix in Dirac space

S-matrix element in configuration space:

$$\begin{aligned}
 S_{(k_f, s') (k_i, s)} &= \int d^3 \vec{x} \psi_{k_f, s'}^{(s)+}(t_f, \vec{x}) \tilde{\psi}_{k_i, s}^{(s)}(t_i, \vec{x}) \\
 &= \int d^3 \vec{x} \psi_{k_f, s'}^{(s)+}(t_f, \vec{x}) \psi_{k_i, s}^{(s)}(t_i, \vec{x}) \\
 &\quad - i \int d^3 \vec{x} d^4 y \psi_{k_f, s'}^{(s)+}(t_f, \vec{x}) S_F(t_f, \vec{x}; y) V(y) \psi_{k_i, s}^{(s)}(y) \\
 &\quad + (-i)^2 \int d^3 \vec{x} d^4 y d^4 y' \psi_{k_f, s'}^{(s)+}(t_f, \vec{x}) S_F(t_f, \vec{x}; y) V(y) S_F(y, y') V(y') \psi_{k_i, s}^{(s)}(y') + \dots \\
 &= \delta^{(3)}(\vec{k}_f - \vec{k}_i) \delta_{ss'} \\
 &\quad - i \int d^4 y \tilde{\psi}_{k_f, s'}^{(s)}(y) V(y) \psi_{k_i, s}^{(s)}(y) \quad \leftarrow \text{Born approx.} \\
 &\quad + (-i)^2 \int d^4 y d^4 y' \tilde{\psi}_{k_f, s'}^{(s)}(y) V(y) S_F(y, y') V(y') \psi_{k_i, s}^{(s)}(y') \quad \leftarrow \text{2nd order} \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

S-matrix has a definite Lorentz transformation behavior



Antiparticle Scattering

Feynman propagator as time-evolution operator: $\mathcal{T} = \psi^\dagger \psi$

$$\int d^3 \vec{x}' \psi_{k_i, s}^{(s)+}(x') S_F(x', x) = \theta(t-t') \tilde{\psi}_{k_i, s}^{(s)}(x)$$

$$\int d^3 \vec{x}' S_F(x, x') \psi_{k_i, s}^{(s)}(x') = \theta(1-t') \psi_{k_i, s}^{(s)}(x)$$

S-matrix element in configuration space:

$$\begin{aligned}
 S_{(k_f, s') (k_i, s)} &= \int d^3 \vec{x} \tilde{\psi}_{k_f, s'}^{(s)+}(t_f, \vec{x}) \psi_{k_i, s}^{(s)}(t_i, \vec{x}) \\
 &= \int d^3 \vec{x} \psi_{k_f, s'}^{(s)+}(t_f, \vec{x}) \psi_{k_i, s}^{(s)}(t_i, \vec{x}) \quad \leftarrow \psi_{k_i, s}^{(s)+}(t_f, \vec{x}) \gamma^0 \gamma^0 \psi_{k_i, s}^{(s)}(t_i, \vec{x}) \\
 &\quad - i \int d^3 \vec{x} d^4 y \psi_{k_f, s'}^{(s)+}(y) \gamma^0 V(y) S_F(y, t_f, \vec{x}) \gamma^0 \psi_{k_i, s}^{(s)}(t_i, \vec{x}) \\
 &\quad + (-i)^2 \int d^3 \vec{x} d^4 y d^4 y' \psi_{k_f, s'}^{(s)+}(y) \gamma^0 V(y) S_F(y, y') V(y') S_F(y', t_f, \vec{x}) \gamma^0 \psi_{k_i, s}^{(s)}(t_i, \vec{x}) + \dots \\
 &= \delta^{(3)}(\vec{k}_f - \vec{k}_i) \delta_{ss'} \\
 &\quad - i \int d^4 y \tilde{\psi}_{k_f, s'}^{(s)}(y) V(y) \psi_{k_i, s}^{(s)}(y) \quad \leftarrow \text{Born approx.} \\
 &\quad + (-i)^2 \int d^4 y d^4 y' \tilde{\psi}_{k_f, s'}^{(s)}(y) V(y) S_F(y, y') V(y') \psi_{k_i, s}^{(s)}(y') + \dots \quad \leftarrow \text{2nd order}
 \end{aligned}$$

