Kapitel 4: Relativistische Kinematik

Postulate der speziellen Relativitätstheorie

1. Die Naturgesetze haben dieselbe Form in verschiedenen Inertialsystemen (Kovarianz der Naturgesetze)
2. Im Vakuum bewegt sich Licht immer mit der Geschwindigkeit $c\,(=1)$ unabhängig vom Bewegungszustand des lichtemittierenden Körpers oder des Beobachters

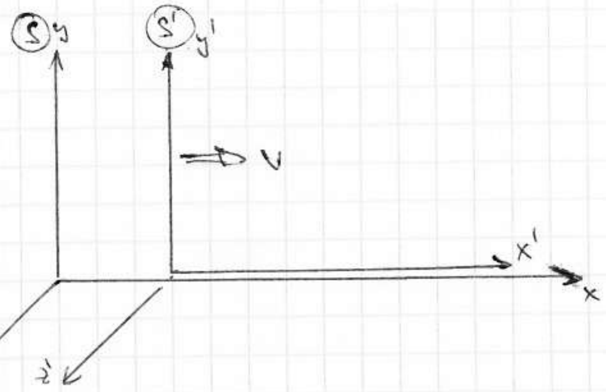
Inertialsystem ($\to$ IS): Koordinatensystem, in dem Newtons 1. Gesetz gültig ist.

D.h. die Geschwindigkeit eines Körpers bleibt konstant (bzgl. Betrag und Richtung), es sei denn, eine Kraft wirkt auf ihn.

$\Rightarrow$ 2 IS bewegen sich immer mit einer konstanten Geschwindigkeit relativ zueinander.

Ein System, das sich relativ zu einem IS mit einer konst. Geschw. bewegt ist ein I.S.

O.b.d.A. Zwei IS S und S' können immer bzgl. der Koordinaten so ausgerichtet sein, daß ihre Relativgeschw. in die x-Richtung verläuft.



O.b.d.A: Wir können Koordinaten wählen, so daß gilt

$$t = t' = 0 \quad \text{für} \quad x = x' = 0$$

$[\, y = y', \; z = z' \;$ sowieso $]$

"Ereignis" (engl. "event") = Ein Punkt in Raum und Zeit = (t, x, y, z)

("Nadelstich") "Koordinate"

LT

4.1. Lorentz transformation

Gegeben sei ein Ereignis $(t, x, y, z) =: (t, \vec{x})$ im IS S.
Dasselbe Ereignis im IS S' befindet sich bei $(t', x', y', z') = (t', \vec{x}')$,
wobei gilt:

$$\left.\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y, \quad z' = z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}}\right\} \quad \text{"Lorentz-Transformation" von } S \text{ nach } S' \ (S \xrightarrow{LT} S')$$

[→ Für eine Weile behalten wir c explizit bei.]

mit $\boxed{\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}}$

↳ Inverse LT von S' nach S: $(v \to -v)$

$$\left.\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y', \quad z = z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned}}\right\} \quad \text{LT von } S' \text{ nach } S \quad (S' \xrightarrow{LT} S)$$

↳ $S \xrightarrow{LT} S'$ dann $S' \xrightarrow{LT} S$ ist die Identität:

$$x = \gamma\left(\gamma[x - vt] + v\gamma\left[t - \frac{v}{c^2}x\right]\right) = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x = x \quad \checkmark$$

$$t = \gamma\left(\gamma\left[t - \frac{v}{c^2}x\right] + \frac{v}{c^2}\gamma\,[x - vt]\right) = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t = t \quad \checkmark$$

Konsequenzen

→ Gleichzeitigkeit ist relativ

Befinden sich 2 Ereignisse (A und B) in S bei gleicher Zeit und an verschiedenen Orten (x_A und x_B), sind diese in S' nicht mehr gleichzeitig.

$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right) \qquad t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_B\right) \qquad \text{mit } t_A = t_B$$

$$\Rightarrow t'_A - t'_B = \gamma\frac{v}{c^2}(x_B - x_A) \neq 0$$

→ Lorentz'sche Längenkontraktion

Ein Stab der Länge L' liege in S' entlang der x-Achse in Ruhe

↳ O.B.d.A seien die Enden des Stabes in S' bei $A = (t'_A, 0, 0, 0)$ und $B = (t'_B, L', 0, 0)$

$t'_A \neq t'_B$ ändert nichts an der Länge, da der Stab in Ruhe ist

↳ In S wird die Länge also zur gleichen Zeit gemessen.

$A = (\gamma t'_A, \gamma v t'_A, 0, 0)$, $B = (\gamma t'_B + \frac{v}{c^2}\gamma L', \gamma L' + \gamma v t'_B, 0, 0)$

O.B.d.A sei $t'_A = 0$ (d.h. Längenmessung bei $t = 0$ in S), dann gilt

$A = (0,0,0,0)$, $B = (0, L, 0, 0) \stackrel{!}{=} (\gamma t'_B + \gamma \frac{v}{c^2} L', \gamma L' + \gamma v t'_B, 0, 0)$

$\Rightarrow \quad t'_B = -\frac{v}{c^2} L'$

$\Rightarrow \quad L = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) L' = \frac{L'}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} L' < L'$

↳ "Ein bewegter Ball ist oval": $\Rightarrow v$

→ Zeit-Dilatation

Zwei Ereignisse (A und B) geschehen in S' bei $x' = y' = z' = 0$ zu Zeiten $t'_A = 0$ und $t'_B = T$. → In S geschehen beide Ereignisse nicht mehr am selben Ort:

$$\left.\begin{aligned} A &= (t_A, x_A, 0, 0) = (0,0,0,0) \\ B &= (t_B, x_B, 0, 0) = (\gamma T, \gamma v T, 0, 0) \end{aligned}\right\} \quad t_B - t_A = \gamma T > T$$

↳ In S finden die Ereignisse mit größerem zeitl. Abstand statt.

↳ Instabile Teilchen mit Geschwindigkeit v haben eine Lebensdauer $\gamma\tau > \tau$.

Die Lebensdauer τ wird immer im Ruhesystem festgelegt

→ Addition von Geschwindigkeiten

Teilchen bewegt sich mit Geschwindigkeit u' im IS S' in x-Richtung

Im IS S gilt: $u = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + v\,dt')}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx')} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}$ $\quad u' = \frac{dx'}{dt'}$

↳ $$\boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}}$$

↳ Für ein Photon gilt: $u' = c \quad \Rightarrow u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c$ ✓

→ Invariantes Abstandsquadrat

Für jedes Ereignis $A = (t, x, y, z)$ gilt, daß die Kombination $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant unter LT'en ist.

⇒ $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$ in beliebigen IS'en S und S'

⇒ Für den Abstand zweier Ereignisse $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ist die Kombination $\underbrace{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}_{\text{Invariantes Abstandsquadrat}}$ gleich in jedem IS.

Beweis: Übung

Bemerkungen:
- Aus dieser Eigenschaft läßt sich die LT ableiten!
- Für Ereignisse entlang eines Lichtstrahls gilt, daß deren Abstandsquadrat Null ist, $(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - \ldots = 0$

4.2. Four vectors

ab jetzt: $c = 1$!

→ Formalismus der die Notation in der Speziellen Relativitätstheorie erheblich vereinfacht.

Ereignis - 4-Vektor

$$\boxed{x^\mu = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad , \mu = 0, 1, 2, 3}$$

Index oben: "kontravariante 4-Vektor" — griechische Indices!

↳ $\boxed{LT: \quad x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu} = \sum_{\nu=0}^{4} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ (Zeile, Spalte)

Einstein'sche Summenkonvention: Über Paare gleicher oberer und unterer Indices wird summiert.

Speziell: LT $S \to S'$ aus 2.1.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ $\boxed{\text{Metrik-Tensor:} \quad g_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}}$

$$\boxed{x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{x}) = (x^0, -\vec{x}) \quad \text{"kovarianter 4-Vektor"}}$$

Es gilt:

$$x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x_0^2 - \vec{x}^2 = t^2 - \vec{x}^2$$

invariant unter Lorentz-Transformationen

auch geschrieben als: $x \cdot x = x^2$ "4-Vektor-Quadrat"

! ⇒ **Allgemein gilt:** Jede Kombination von 4 Objekten in einem Vektor, der obige Eigenschaft hat, ist ein 4-Vektor

a^μ, b^μ 4-Vektoren ⇒ $a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu$

$$= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{a}\vec{b}$$

ist invariant unter LT'en

check: $x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$

$\rightarrow \Lambda^\mu{}_\sigma x^\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\tau x^\tau = x^\sigma \underbrace{\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\tau}_{= g_{\sigma\tau}} x^\tau$ ✓

$$\boxed{\text{(Inverser) Metrik-Tensor: } \quad g^{\mu\nu} := g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}}$$

$\rightarrow$ Invertierung der Gl.: $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$

4-Kronecker-Delta

↳ Definiere neuen Tensor $g^{\mu\nu}$ mit $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \vec{0} \\ \hline \vec{0} & \mathbb{1} \end{array}\right) = 1$

$\Rightarrow g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu}$

$$\boxed{g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}}$$

↳ LT für kovariante 4-Vektoren:

$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Rightarrow x'_\mu = g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu x^\nu = \underbrace{g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu g^{\nu\tau}}_{= \Lambda_\sigma{}^\tau} x_\tau$

$\Rightarrow \boxed{x_\mu \rightarrow \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \text{ mit } \Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\tau g^{\tau\nu}}$

Speziell: LT aus 2.1: $\Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma, & \gamma v, & 0, & 0 \\ \gamma v, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$

4-Vektor-Quadrate

$\rightarrow$ 4-Ereignis-Vektor eines Objekts, das einfach am Ursprung liegt:

$x^\mu = (t, \vec{0}) \Rightarrow x^2 = x_\mu x^\mu = t^2 > 0$

$\rightarrow$ 4-Ereignis-Vektor eines Objekts, das bei $t=0$ bei $\vec{x} \neq \vec{0}$ liegt:

$x^\mu = (0, \vec{x}) \Rightarrow x^2 = -\vec{x}^2 < 0$

$\rightarrow$ 4-Ereignis-Vektor eines Photons, das bei $t=0$ am Ursprung ist:

$x^\mu = (|\vec{x}|, \vec{x}) \Rightarrow x^2 = \vec{x}^2 - \vec{x}^2 = 0$

> ↳ Man nennt einen 4-Vektor a^μ
>
> mit $a^2 > 0$ "zeit-artig",
>
> mit $a^2 < 0$ "raum-artig" und
>
> mit $a^2 = 0$ "licht-artig".

4.3. Four tensors

$s^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}, \Lambda^{\mu}{}_{\nu}, \Lambda_{\mu}{}^{\nu}, \dots$ Tensoren mit Rang 2

$q^{\mu\nu\sigma}, s^{\mu}{}_{\nu\tau}, \dots$ Tensoren mit Rang 3, etc.

→ Tensoren sind 4-Tensoren, wenn <u>alle</u> ihre oberen und unteren Indizes genau wie kontravariante und kovariante 4-Vektoren transformieren.

a.b invariant unter LT'en

z.B. ▪ $g_{\mu\nu} \rightarrow \Lambda_{\mu}{}^{\sigma} \Lambda_{\nu}{}^{\tau} g_{\sigma\tau} \overset{\downarrow}{=} g_{\mu\nu}$ ← Daraus kann man das Inverse von Λ ableiten

↳ $\delta^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu\sigma} \Lambda_{\nu\tau} \delta_{\sigma}{}^{\tau} = \Lambda^{\mu\sigma} \Lambda_{\nu\sigma}$

$$\boxed{\delta^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda_{\nu}{}^{\sigma}}$$

kontravar. LT kovariante LT

▪ $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \rightarrow \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\sigma} \tilde{\Lambda}_{\nu}{}^{\tau} \Lambda^{\sigma}{}_{\tau}$

▪ $x^{\mu} x_{\mu} \rightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda_{\mu}{}^{\tau} x^{\sigma} x_{\tau}$ ← Auch hieraus kann man ein Inverses von Λ ableiten

↳ Aus Invarianz folgt $\boxed{\delta_{\sigma}{}^{\tau} = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda_{\mu}{}^{\tau}}$

4.4. General Form of a Lorentz transformation

→ Boost and rotations can be expressed in the following general way:

$$\boxed{\begin{aligned}\Lambda^\mu{}_\nu &= \exp\left[-\tfrac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,(J^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu\right]\\ &= \exp\left[\tfrac{1}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,(\tilde{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu\right]\end{aligned}}$$

$(J^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i\,(\tilde{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu$

"generators"

$\omega_{\alpha\beta}\in\mathbb{R}$ parameter tensor that characterizes the transformation

$\exp(M^\mu{}_\nu)$ means : $g^\mu{}_\nu + M^\mu{}_\nu + \frac{1}{2!}M^\mu{}_\sigma M^\sigma{}_\nu + \frac{1}{3!}M^\mu{}_\sigma M^\sigma{}_\tau M^\tau{}_\nu + \dots$

→ $\boxed{(\tilde{J}^{\alpha\beta})_{\mu\nu} = g^\alpha{}_\mu\, g^\beta{}_\nu - g^\alpha{}_\nu\, g^\beta{}_\mu = \delta^\alpha{}_\mu\,\delta^\beta{}_\nu - \delta^\alpha{}_\nu\,\delta^\beta{}_\mu}$ $\qquad (\tilde{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = g^{\mu\tau}(\tilde{J}^{\alpha\beta})_{\tau\nu}$

↳ We have: $\tilde{J}^{\alpha\beta} = -\tilde{J}^{\beta\alpha} \Rightarrow \underbrace{\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}}_{6\text{ free real parameters}}$ (antisymmetric)

$(\tilde{J}^{\alpha\beta})_{\mu\nu} = -(\tilde{J}^{\alpha\beta})_{\nu\mu} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left[(\tilde{J}^{\alpha\beta})_{\mu\nu}\right] = (\tilde{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\mu = 0$

→ $\omega_{\alpha\beta}$: 3 parameters for spatial rotations
⊕ 3 parameters for boosts

$$\omega_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \omega_{0j} \\ \hline \omega_{i0} & \omega_{ij}\end{array}\right)$$

boosts (ω_{0j}), rotations (ω_{ij})

→ <u>Boosts:</u> $\boxed{\omega_{0i} = -\omega_{i0} = \beta_i = \beta u_i \quad (|\vec{u}|=1,\ \beta\in\mathbb{R})}$

$$(\tilde{J}^{01})^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1\,0\,0 \\ \hline \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} & 0\end{array}\right) \quad (\tilde{J}^{02})^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\,1\,0 \\ \hline \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & 0\end{array}\right) \quad (\tilde{J}^{03})^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\,0\,1 \\ \hline \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} & 0\end{array}\right)$$

$$↳\ \Lambda^\mu{}_\nu(\vec{\beta}) = \exp\left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta_j \\ \hline \beta_i & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \cosh\beta & u^i\sinh\beta \\ \hline u^i\sinh\beta & \delta^{ij} + (\cosh\beta - 1)u^iu^j\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma v^i \\ \hline \gamma v^i & \delta^{ij} + (\gamma-1)u^iu^j\end{array}\right)$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $v^2 = \vec{v}^2$, $u^i = \frac{v^i}{|\vec{v}|}$

$v = \tanh\beta$

example: $p^\mu = (m,\vec{0})$ massive particle at rest

$$\to \Lambda^\mu{}_\nu(\vec{\beta})p^\nu = (m\cosh\beta,\ u^i m\sinh\beta) = (m\gamma,\ m\vec{v}\gamma) = \Big(\underbrace{\tfrac{m}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{energy}},\ \underbrace{\tfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{momentum}}\Big) = (E_{\vec{p}},\vec{p})$$

$\Lambda^\mu{}_\nu(\vec{\beta}) = \Lambda^\mu{}_\nu(\vec{v})$ boost a massive particle at rest to velocity $\vec{v}$

→ <u>Rotations:</u> $\boxed{\omega_{ij} = \theta_k\,\epsilon_{kij} \qquad \theta_k\in\mathbb{R}}$

→ $\Lambda^\mu{}_\nu(\vec{\theta})$ rotates by angle $|\vec{\theta}|$ around axis $\vec{u} = \frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|}$

4.5. 4-Geschwindigkeit und 4-Impuls

4-Geschwindigkeit

$x^\mu = (t, \vec{x}(t))$ sei 4-Vektor eines Teilchens mit Geschwindigkeit $\vec{v}$

$\hookrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$

offensichtlich: $\frac{dx^\mu}{dt} = (1, \vec{v})$ ist kein 4-Vektor, da t invariant ist.

Einzige sinnvolle Zeitvariable, die invariant ist: (per definitionem)

→ Zeit im Ruhesystem: $x^\mu_{\text{Ruhe}} = (\tau, \vec{0})$, τ : Eigenzeit

$$t = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu(t)}{d\tau} = \gamma(1, \vec{v}) \qquad \text{"4-Geschwindigkeit"}}$$

$\hookrightarrow u^2 = \gamma^2(1-\vec{v}^2) = 1$ offensichtlich invariant

4-Impuls

$\boxed{p^\mu = m u^\mu}$ → Ist offensichtlich ein 4-Vektor.

m: Ruhemasse

Aber: Macht das so einfach Sinn?

↳ Ein sinnvoller 4-Impuls sollte folgende Eigenschaften haben:

(a) Sinnvoller nicht-relativ. Limes: $p^\mu \xrightarrow[\gamma=1]{v\ll 1} (m, m\vec{v})$ ✓ o.k.

Ruhemasse   nicht-rel. Impuls

(b) sinnvolle Transformationseigenschaften, d.h. sollte 4-Vektor sein: ✓ o.k.

(c) sollte so formuliert sein, daß Energie- und Impulserhaltung in der Notation manifestiert sind:

→ kann nicht mittels Theorie entschieden werden, sondern nur durch experimentelle Messungen

→ Es zeigt sich experimentell: auch o.k. für p^μ ✓

Wichtig: Im Prinzip müßte die Definition von p^μ nicht eindeutig sein, sofern (a) – (c) erfüllt sind.

$\hookrightarrow$ $\boxed{p^\mu = (p^0, \vec{p}) = m\gamma(1, \vec{v})}$

Offensichtlich: $\boxed{\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \quad \text{"relativistischer 3-Impuls"}}$

Aber was ist p^0 ?

$\hookrightarrow$ Es gilt: $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2$ [für ein reelles Teilchen !]

$$\Leftrightarrow (p^0)^2 = m^2 + \vec{p}^2$$

$$\Leftrightarrow p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

$\hookrightarrow$ Betrachte nichtrelativistischen Limes: $|\vec{v}| \ll 1$

$$p^0 = m\left(1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2}\right)^{1/2} = m\left(1 + \frac{\vec{v}^2}{1-\vec{v}^2}\right)^{1/2}$$

$$\approx \underbrace{m}_{\text{Ruhemasse}} + \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2} m v^2}_{\text{nichtrelat. kinet. Energie}} + \underbrace{\tfrac{3}{8} m v^4 + \dots}_{\text{relativ. Korrektur}}}_{\text{relativistische kinetische Energie}}$$

Offensichtlich: $\boxed{p^0 : \text{relativistische Energie}}$ $\quad \boxed{E = p^0}$

[genauer: Eine sinnvolle Definition der relativistischen Energie sofern (c) erfüllt ist.]

4-Impuls für masselose Teilchen (z.B. Photon)

$\hookrightarrow$ Es sollte gelten: $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{E = p_0 = |\vec{p}|}$

Im Prinzip unnötig, aber evtl. hilfreich für das Verständnis.

Ist das konsistent mit der Definition für massive Teilchen ?

$\hookrightarrow$ Sei E fest gegeben für massive Teilchen mit Geschw. v

$$\Rightarrow E^2 = \frac{m^2}{1-v^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{E^2 - m^2}{E^2} = 1 - \frac{m^2}{E^2} \longrightarrow 1 \text{ für } m \to 0 \quad \text{o.k.} \checkmark$$

Dazu: $\vec{p}^2 = \frac{m^2 v^2}{1-v^2} = E^2 - m^2 = E^2\left(1 - \frac{m^2}{E^2}\right)$

$$\longrightarrow E^2 \text{ für } m \to 0 \quad \text{o.k.} \checkmark$$

Wichtige Schlußfolgerung: Masselose Teilchen fliegen immer mit Lichtgeschwindigkeit (ob sie Photonen sind oder nicht und unabh. von ihrer Energie).

Schlußfolgerung 2: Photonen unterscheiden sich nur durch deren Flugrichtung und deren Energie.

$\rightarrow$ Planck-Formel: $E = h\nu \leftarrow$ Frequenz.

4.6. Teilchenreaktionen & Energie-Impuls-Erhaltung

Experimentelles Faktum: Mit der obigen Definition für 4-Impulse p^μ gilt für jede Art von Teilchenreaktion: $A + B + \ldots \to A' + B' + \ldots$

$$p_A^\mu + p_B^\mu + \ldots = p_{A'}^\mu + p_{B'}^\mu + \ldots$$

[Wichtig: $A, B, \ldots$ und $A', B', \ldots$ beinhalten alle an der Reaktion beteiligten Teilchen!]

Beispiel 1: Zwei gleiche Teilchen mit Masse m werden mit entgegengesetzter Geschw. v aufeinander geschossen und bilden ein neues Teilchen in Ruhe mit Masse M.

$$p_1^\mu = (E_1, \vec{p}) \qquad E_1 = E_2 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} =: E$$

$$p_2^\mu = (E_2, -\vec{p})$$

$$p_3^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \Rightarrow M^2 = p_3^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 \cdot p_2$$

$$= 2m^2 + 2(E^2 + \vec{p}^2)$$

$$= 2m^2 \left[1 + \frac{1}{1-v^2} + \frac{v^2}{1-v^2}\right] = \frac{4m^2}{1-v^2}$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2}}$$

Beispiel 2: Pion (in Ruhe) zerfällt in ein Myon und ein Myon-Antineutrino

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

Wie groß sind die Geschwindigkeiten von Myon und Antineutrino?

$$p_\pi^\mu = p_\mu^\mu + p_\nu^\mu = (m_\pi, \vec{0}), \quad p_\mu^\mu = (E_\mu, \vec{p}_\mu), \; p_\nu^\mu = (E_\nu, -\vec{p}_\mu) = (|\vec{p}_\mu|, -\vec{p}_\mu)$$

Version 1: Energieerhaltung: $m_\pi = E_\mu + E_\nu$

$$\Leftrightarrow m_\pi = \sqrt{m_\mu^2 + \vec{p}_\mu^2} + |\vec{p}_\mu|$$

$$\Leftrightarrow (m_\pi - |\vec{p}_\mu|)^2 = m_\mu^2 + \vec{p}_\mu^2 \Leftrightarrow |\vec{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}, \quad E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}$$

$$\Rightarrow v_\mu = \frac{|\vec{p}_\mu|}{E_\mu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} = 0.271$$

$$v_\nu = 1$$

Version 2: $p_\nu^\mu = p_\pi^\mu - p_\mu^\mu$ oder einfach: $p_\nu = p_\pi - p_\mu$

$$\Rightarrow \quad 0 = p_\nu^2 = (p_\pi - p_\mu)^2 = m_\pi^2 + m_\mu^2 - 2 p_\pi p_\mu$$

$$= m_\pi^2 + m_\mu^2 - 2 m_\pi E_\mu$$

$$\Leftrightarrow \quad E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2 m_\pi} \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_\mu| = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2 m_\pi}$$

⇝ Eleganter als Version 1 durch geschickte Benutzung des 4-Impuls-Quadrats.

Schwerpunktsystem: Bei einer Teilchenreaktion $A + B + .. \to A' + B' + ...$ mit $p_A + p_B + .. = p_{A'} + p_{B'} + ...$ ist das Schwerpunktsystem das Inertialsystem, in dem gilt: $\vec{p}_A + \vec{p}_B + ... = \vec{p}_{A'} + \vec{p}_{B'} + ... = 0$

→ Bei vielen Teilchenreaktionen sind Laborsystem und Schwerpunktsystem nicht identisch.

"Center-of-mass-System" (CM)

Beispiel 3: Bevatron-Beschleuniger in Berkeley (1954 – 1960)

Antiprotonproduktion durch Beschuß eines Festkörpers mit beschleunigten Protonen: $\underset{\text{beschleunigt}}{p} + \underset{\text{in Ruhe}}{p} \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$

→ Wie groß muß die Energie des beschleunigten Protons sein, damit die Reaktion überhaupt stattfinden kann?

$$p_{P1}^\mu = (E, \vec{p}) \quad p_{P2}^\mu = (m_p, \vec{0}) \quad \Rightarrow \quad p_{tot}^\mu = (E + m_p, \vec{p})$$

$$= p_{PF1}^\mu + p_{PF2}^\mu + p_{P2}^\mu + p_{\bar{p}}^\mu$$

↳ Problem: Im Laborsystem bewegen sich die Teilchen nach der Reaktion auch immer mit Gesamt-3-Impuls $\vec{p}$

⇒ komplizierte Rechnung

Eleganter Weg: Benutze Schwerpunktsystem:

Im Schwerpunktsystem muß genau so viel Energie vorhanden sein, daß $p + p + p + \bar{p}$ alle gerade in Ruhe produziert werden

$\hookrightarrow \; p^{\mu}_{tot,\,CM} = (4m_p, \vec{0})$

Aufgrund der E-p-Erhaltung und der Invarianz der 4-Impuls-Quadrats folgt:

$$(p_{tot})^2 = (E+m_p)^2 - \vec{p}^{\,2} = (p_{tot,\,CM})^2 = 16\, m_p^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (E+m_p)^2 - (E^2 - m_p^2) = 16\, m_p^2$$

$$\Rightarrow \quad E = 7 m_p$$

$> 3\, m_p$, da ein Teil der Energie des beschl. Protons im Laborsystem für die Schwerpunktsbewegung der $p+p+p+\bar{p}$ aufgewendet werden muß.

<u>Beispiel 4:</u> Zwei identische Teilchen A, B mit Energie $E > m_{A,B} = m$ werden mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten aufeinander geschossen.

$\rightarrow$ Wie groß ist die Energie von A aus der Sicht (im Ruhesystem von) B?

$$p_A^{\mu} + p_B^{\mu} = (2E, \vec{0})$$

$$(p_A^{\mu} + p_B^{\mu})_{B \text{ in Ruhe}} = (E_A + m, \vec{p}_A)$$

$$(p_A + p_B)^2 = (p_A + p_B)^2_{B\,\text{Ruhe}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4E^2 = (E_A + m)^2 - (E_A^2 - m^2) = 2E_A m + 2m^2$$

$$\Rightarrow \quad E_A = \frac{2E^2 - m^2}{m} \geq E \qquad \left(\text{da } \frac{2E^2 - m^2}{m} - E = \frac{(E-m)(2E+m)}{m} \geq 0\right)$$

$\vec{p}_{tot} = 0$ "Schwerpunktsystem"

$\vec{p}_B = 0$ "Fixed-Target-System"

$\Rightarrow$ Bei Fixed-Target-Experimenten müssen die beschleunigten Teilchen i.A. auf wesentlich höhere Energien gebracht werden als bei Experimenten im Schwerpunktsystem, um dieselben Reaktionen stattfinden zu lassen.