Übungen zu T2, Sommersemester 2017, Blatt 10

1) Spin-Messungen

Gegeben sei anfangs ein Spin-1/2 System das sich in einem reinem Spinzustand $\chi_{z,+}$ befindet, wobei der Spin in z-Richtung zeigt.

(a) Zu welchem Spin-Operator is $\chi_{z,+}$ Eigenzustand und mit welchem Eigenwert?

(b) Geben Sie die Dichtematrix des Zustands $\chi_{z,+}$ an.

(c) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden bei einer Messung des Spins in x-Richtung die Werte $\pm\hbar/2$ gemessen? Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich bei der Messung des Spins in y-Richtung? Welche Erwartungswerte ergeben sich jeweils?

(d) Nehmen Sie an, Sie erhalten bei der Messung des Spins in x-Richtung den Wert $-\hbar/2$. Der Spin sei nach der Messung noch vorhanden und nicht zerstört. In welchem Zustand befindet sich dann der Spin nach der Messung?

(e) Führen Sie nun an diesem Spin eine weitere Spinmessung in $\vec{n}$-Richtung durch, wobei $\vec{n}$ ein Einheitsvektor ist, welcher bezüglich der x-Richtung um den Winkel ϕ um die z-Achse gedreht ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei dieser Spinmessung den Wert $\hbar/2$?

(f) Bestimmen Sie den Erwartungswert für diese Spinmessung in $\vec{n}$-Richtung?

2) Magnetisches Moment im thermodynamischen Gleichgewicht

Gegeben sei ein Spin-1/2 System in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_3$. Der Operator des magnetischen Moments ist $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ und der Hamiltonoperator ist $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$. Befindet sich der Spin in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T, so beschreibt die Dichtematrix

$$\rho = \mathcal{N}\exp(-\beta H), \quad \beta = 1/kT$$

den entsprechenden Gleichgewichtszustand. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor $\mathcal{N}$. Berechnen Sie die Erwartungwerte und Schwankungsquadrate von μ_i $(i = 1, 2, 3)$ und H. Skizzieren Sie den Erwartungswert von μ_3 als Funktion der Temperatur T.

3) Rechnen mit Observablen in einem endlich-dimensionalen Hilbertraum

Es sei $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ der Hilbertraum komplexer 3-dimensionaler Vektoren mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle\chi|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{3} \chi_k^* \psi_k$. Eine bestimmte Observable sei durch die Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}i & \sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i & 2 & -1 \\ -\sqrt{2}i & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left[|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

dargestellt.

(a) Was sind die möglichen Messwerte $a_1, \ldots$ dieser Observablen?

(b) Bestimmen Sie zugehörige orthonormierte Eigenvektoren, welche natürlich nur bis auf eine komplexe Phase eindeutig sind. Sie müssen in diesem Fall, dass Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden.

(c) Bestimmen Sie den Projektor auf den Eigenraum, der zu dem positiven Eigenwert gehört.

(d) Geben Sie für jeden der möglichen Messwerte die Wahrscheinlichkeit an, ihn bei eine Messung im Zustand $|\phi\rangle$ zu erhalten.

(e) Geben Sie für jeden der möglichen Messwerte die Wahrscheinlichkeit an, ihn bei einer Messung dieser Observablen zu erhalten, wenn sich das System in dem durch die Dichtematrix

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschriebenen Zustand befindet.

(f) Bestimmen Sie den Erwartungswert, den Sie bei der Ausführung von vielen Messungen der Observablen A an dem durch die Dichtematrix ρ gegebenen Zustand erhalten.