Übungen zu T2, Sommersemester 2017, Blatt 9

1) Allgemeine Form der Unschärferelation für beliebige Zustände

Das Schwankungsquadrat $(\Delta_\omega A)^2$ einer Observablen A im Zustand ω ist durch

$$(\Delta_\omega A)^2 = \omega((A - \omega(A))^2)$$

definiert. Es seien nun $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$ seien zwei hermitesche Operatoren. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Zustand ω stets Ungleichung

$$\Delta_\omega A \Delta_\omega B \geq |\omega(\frac{i}{2}[A, B])|.$$

erfüllt ist. Benützen Sie dafür den (nicht-Hermiteschen) Operator

$$C = \frac{A - \omega(A)}{\Delta_\omega A} + i\frac{B - \omega(B)}{\Delta_\omega B}$$

und die allgemeinen Funktional-Eigenschaften (a)-(c) des Zustands ω aus Kapitel 4.2.

2) Gemischter Zustand

(a) Zeigen Sie, dass ein Zustand, der durch die Dichtematrix ρ dargestellt ist, genau dann ein gemischer Zustand ist, wenn $\rho^2 \neq \rho$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass ein Zustand, der durch die Dichtematrix ρ dargestellt ist, genau dann ein gemischer (reiner) Zustand ist, wenn $\mathrm{Tr}[\rho^2] < 1$ ($\mathrm{Tr}[\rho^2] = 1$) gilt.

3) Harmonischer Oszillator im Thermischen Gleichgewicht

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit Winkelfrequenz ω, welcher im thermischen Gleichgewicht ist mit einem äußeren Wärmebad mit der absoluten Temperatur T. Die Dichtematrix hat dann die Form

$$\rho = \frac{\exp(-\mathbf{H}/kT)}{\mathrm{Tr}[\exp(-\mathbf{H}/kT)]},$$

wobei $\mathbf{H}$ der Hamiltonoperator ist und k die Boltzmann-Konstante.

(a) Bestimmen Sie die Spektraldarstellung des gemischten Zustandes ρ in Bra-Ket-Notation als Funktion der Temperatur, wobei $|\phi_n\rangle$ der normierte Eigenzustand zur Besetzungszahl n sei. Für die Berechnungen ist die Summationsformel für die geometrische Reihe sehr nützlich.

(b) Berechnen Sie die mittlere Besetzungszahl $\langle N \rangle$ und die mittlere Energie $\langle H \rangle$ als Funktion der Temperatur T. ($\langle N \rangle = (\exp(\hbar\omega/kT) - 1)^{-1}$)

(c) Berechnen Sie die mittlere Besetzungszahl für sichtbares Licht ($\lambda = 550\mathrm{nm}$) bei Raumtemperatur ($T = 295\mathrm{K}$) und an der Oberfläche der Sonne ($T = 5500\mathrm{K}$).

4) Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die folgenden Relationen erfüllt sind:

a) $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i \mathbb{1}_{2x2}$

b) $[\sigma_k, \sigma_l] = 2i\varepsilon_{klm}\sigma_m$ (note: sum convention)

c) $\sigma_k \sigma_l + \sigma_l \sigma_k = 2\delta_{kl} \mathbb{1}_{2x2}$

d) Leiten Sie aus b) und c) ab, dass gilt: $\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} \mathbb{1}_2 + i\varepsilon_{klm}\sigma_m$

e) Zeiten Sie, dass aus d) folgt, dass gilt: $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\mathbb{1}_2 + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$ für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$