Übungen zu T2, Sommersemester 2017, Blatt 8

1) Räumliche Translation

Die Wirkung des 1-dimensionale räumlichen Translationsoperators T_a auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$ ist durch

$$(T_a\psi)(x) = \tilde{\psi}_a(x) = \psi(x-a), \quad a \in \mathbb{R} \tag{1}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass T_a die explizite Form $T_a = \exp(-a\frac{d}{dx})$ hat. Schreiben Sie den Ausdruck auch als Funktion des Impulsoperators P und formulieren Sie Gl. (1) in abstrakter Form für Ket-Zustände.

2) Teilchenstreuung am Potentialwall I

Gegeben sei ein System mit einem Teilchen mit Masse m in einer Dimension im Potential $V(x) = V_0\Theta(x)\Theta(a-x)$. Betrachten Sie die Eigenfunktionen $\phi_k(x)$ zum Energieeigenwert $E(k) = \hbar^2k^2/2m > V_0$, die einem von links einlaufenden Teilchen entsprechen, und die in der Vorlesung besprochen wurden (englisches Skriptum Kapitel 3.4).

(a) Bestimmen Sie die Amplituden A, B und T aus den Stetigkeitsbediungen der Wellenfunktionen an den Stellen $x = 0$ und $x = a$.

(b) Bestimmen Sie den Wahrscheinlichkeitsstrom in den drei Bereichen $x < 0$, $0 < x < a$ und $x > a$ als Funktion der A, B und T. Interpretieren Sie die einzelnen Beiträge.

(c) Zeigen Sie, dass Teilchenzahlerhaltung in allen Bereichen gültig ist.

3) Teilchenstreuung am Potentialwall II

Bearbeiten Sie Aufgabe (2) für den Fall, dass $E(k) = \hbar^2k^2/2m < V_0$.

4) Distributionen

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen im Distributionssinn ($\theta(x)$ ist die Heavisidesche Stufenfunktion).

- $\theta(x)$
- $\theta(-x)$
- $|x| = -x\,\theta(-x) + x\,\theta(x)$
- $e^{-a|x|} = e^{ax}\,\theta(-x) + e^{-ax}\,\theta(x),\ a > 0.$

5) Teilchen im Delta-Potential

Die Wellenfunktion eines Teilchens mit einem Freiheitsgrad habe die Form

$$\psi(x) = \mathcal{N}\exp(-a|x|), \quad a > 0.$$

(a) Überzeugen Sie sich mit Hilfe der Resultate aus Aufgabe (4), dass die Wellenfunktion $\psi(x)$ für eine geeignete Wahl des Parameters a eine Energieeigenfunktion des Hamiltonoperators

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\,\delta(x), \quad (\lambda > 0)$$

ist. Wie ist a zu wählen und was ergibt sich für den Energieeigenwert E?

(b) Bestimmen Sie den Wahrscheinlichkeitstrom für $|x| > 0$ und argumentieren Sie, dass die Wellenfunktion als ein Bindungszustand interpretiert werden muss. Welche Interpretation hat dann der Energieeigenwert?

(c) Argumentieren Sie, warum es keine weiteren Bindungszustände geben kann.