Übungen zu T2, Sommersemester 2017, Blatt 7

1) Leiteroperatoren

Die Leiteroperatoren eines eindimensionalen harmonischen Oszillators $a, a^\dagger$ erfüllen die Vertauschungsrelation $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$. Zeigen Sie:

1. $\left[a, (a^\dagger)^n\right] = n(a^\dagger)^{n-1}$
2. $\left[a, f(a^\dagger)\right] = f'(a^\dagger)$

Nehmen Sie an, dass die Funktion f als Potenzreihenentwicklung definiert ist.

2) Kommutatoren

Bestimmen Sie folgende Kommutatoren:

In einer Dimension: $[X^2, P^2]$

In drei Dimensionen: Der Operator A sei definiert durch $A = X_1 P_2 - X_2 P_1$.
Berechnen Sie $[A, X_1^2]$.

3) Erwartungswerte für den Harmonischen Oszillator

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X \rangle_n$, $\langle P \rangle_n$, $\langle X^2 \rangle_n$, $\langle P^2 \rangle_n$ für die Energieeigenzustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators ($\langle O \rangle_n \equiv \langle n|O|n\rangle$). Nutzen Sie die algebraische Methode mit Hilfe der Leiteroperatoren.

4) Kohärenter Zustand I

Der Zustand $|z\rangle \equiv |\psi_z\rangle$ (mit $z \in \mathbb{C}$) eines harmonischen Oszillators sei durch die Eigenwertgleichung $a|z\rangle = z|z\rangle$ definiert. Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Gleichung durch

$$|z\rangle = C e^{z a^\dagger} |0\rangle$$

gegeben ist. Nutzen Sie die in Aufgabe (1) hergeleiteten Formeln. Der Zustand $|z\rangle$ ist ein Beispiel für einen kohärenten Zustand.

5) Kohärenter Zustand II

Schreiben Sie den kohärenten Zustand $|z\rangle$ als Linearkombination der normierten Energieeigenzustände $|n\rangle \equiv |\phi_n\rangle$ des harmonischen Oszillators. Bestimmen Sie $\langle n|z\rangle$. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor C (abgesehen von einem willkürlich wählbaren Phasenfaktor $e^{i\alpha}$) durch die Normierungsbedingung $\langle z|z\rangle = 1$.