Übungen zu T2, Sommersemester 2017, Blatt 6

1) H-Atom in drei Raumdimensionen

Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\vec{P}$ und $\vec{P}^2$ für die Grundzustandswellenfunktion des H-Atoms. Siehe Aufgabe (2) auf Übungsblatt 4.

2) Impulsraumwellenfunktionen mit minimalem Unschärfeprodukt

Jene Impulsraumwellenfunktionen $\tilde{\psi}(p)$ (in einer Dimension), für die das Produkt aus Orts- und Impulsunschärfe den minimalen Wert $\Delta X \Delta P = \hbar/2$ besitzt, sind durch die Gleichung

$$\left(\frac{X - x_0}{\sigma} + i\,\frac{P - p_0}{\hbar/2\sigma}\right)\tilde{\psi}(p) = 0$$

charakterisiert. Dabei bezeichnet P den Impulsoperator in der Impulsdarstellung und $X = i\hbar\,\partial/\partial p$ den Ortsoperator im Impulsraum. x_0 ist der Erwartungswert des Ortsoperators, p_0 der Erwartungswert des Impulsoperators und $\sigma = \Delta X$ die Ortsunschärfe. Ermitteln Sie $\tilde{\psi}(p)$ durch Lösen der Differentialgleichung, wobei in der Endlösung natrlich die übliche Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp\,|\tilde{\psi}(p)|^2 = 1$$

erfüllt sein soll. Das Ergebnis wird übrigens ausführlich im handschriftlichen Vorlesungsskriptum Chap. 2.9 diskutiert.

3) Zeitentwicklung im Impulsraum

Ein freies Teilchen mit Masse m sei zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die in Aufgabe (2) berechnete Impulsraum-Wellenfunktion beschrieben. (Siehe handschriftliches Vorlesungsskriptum Chap. 2.9.) Bestimmen Sie die zeitabhängige Impulsraum-Wellenfunktion $\tilde{\psi}(p,t)$. Bestimmen Sie Mittelwerte und Schwankungsquadrate von X und P zum Zeitpunkt t.

4) Zeitentwicklung im Ortsraum

Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe (3) für $x_0 = 0$, und bestimmen Sie die zeitabhängige Konfigurationssraumwellenfunktion $\psi(x,t)$. Geben Sie $|\psi(x,t)|^2$ an. Nutzen Sie dabei insbesondere die Methode the quadratischen Ergänzung. (Siehe auch handschriftliches Vorlesungsskriptum Chap. 2.9. zur Diskussion des Gauss'schen Wellenpackets.)

Hinweis: Es seien $c, d \in \mathbb{C}$ (!) mit $\mathrm{Re}\,c > 0$. Auch dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-c(x-d)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}.$$

Überprüfen sie diese Relation einfach durch ein paar numerische Tests (z.B. mit Mathematica).

5) Kommutatoren

Zeigen Sie folgende Identitäten für den Kommutator $[A, B] = AB - BA$ zweier linearer Operatoren A und B. (Es sei C auch ein linearer Operatore und α, β seien komplexe Zahlen.)

(a) $[A, B] = -[B, A]$

(b) $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$

(c) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B\,, \quad [A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

(d) $[A, [B, C] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacoby-Idntität)

6*) Video-Clip

Visualisieren Sie $|\psi(x, t)|^2$ aus Aufgabe (3) als Funktion der Zeit t in einem Video-Clip, indem Sie z.B. die `(List)Animate`-Funktion von Mathematica benutzen. Überlegen Sie sich dabei, wie Sie die Parameter so festlegen, damit man eine schöne Visualisierung bekommt. (Das in der Vorlesung benutzte Mathematica-Notebook können Sie auf der Vorlesungsseite herunterladen.)

Diese Sternchen-Aufgabe ist nicht verpflichtend und stellt eher ein kleines Projekt dar, das Sie anregen soll, über den Tellerrand der Vorlesung zu schauen. Diskutieren Sie ihr Ergebnis mit Kommilitonen.