Übungen zu T2, Sommersemester 2016, Blatt 5

1) Reelle Wellenfunktion

Betrachten Sie den **Spezialfall** einer **reellen** Wellenfunktion $\varphi(x)$ in einer Dimension, die für $x \to \pm\infty$ verschwindet. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Erwartungswert des Impulses Null ist, unabhängig von den weiteren Eigenschaften der Wellenfunktion.

2) Die Wellenfunktion eines Teilchens in einer Dimension habe die Form

$$\psi(x) = \varphi(x) e^{ip_0 x/\hbar}$$

mit reellem p_0 und einer **reellen** Funktion φ(x) mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x)^2 = 1\,,$$

d.h. $\phi(x)$ ist wie die Funktion aus Aufgabe **1)** Berechnen Sie den Erwartungswert des Impulses. Welche physikalische Bedeutung besitzt die Größe p_0?

3) Impulsoperator und Unschärferelation

Bestimmen Sie die Erwartungwerte von P und P^2 für die Wellenfunktion $\psi(x)$ des Gaußsches Wellenpakets von Aufgabe **(4)** auf dem Übungsblatt 4.. Was erhält man für die Impulsunschärfe ΔP? Überprüfen Sie die Unschärferelation. Seien Sie dabei effizient und nutzen Sie z.B. geeignete Variablentransformationen, um die Integrale auf einfache Standardformen zurückzuführen oder um Resulate aus vorherigen Aufgaben und Übungsblättern zu nutzen.

4) Dieselbe Rechnung im Impulsraum

Bestimmen Sie die Impulsraum-Wellenfunktion $\tilde{\psi}(p)$ des Gaußschen Wellenpakets von Aufgabe **(4)** auf dem Übungsblatt 4. Bestimmen Sie die Erwartungswerte von X, X^2, P und P^2. Seien Sie dabei effizient und nutzen Sie z.B. geeignete Variablentransformationen, um die Integrale auf einfache Standardformen zurückzuführen oder um Resulate aus vorherigen Aufgaben und Übungsblättern zu nutzen.

5) Kommutierende Operatoren

Seien A, B und C lineare Operatoren mit der Eigenschaft $[A, C] = [B, C] = 0$. Folgt daraus auch, dass $[A, B] = 0$ gilt?

6) Matrixelemente und Wellenfunktionen

Es seien X ($\vec{X}$) und P ($\vec{P}$) Orts- und Impulsoperatoren in einer Dimension (drei Dimensionen). Der Zustand $|\psi\rangle$ habe die Ortsraum-Wellenfunktion $\langle\vec{x}|\psi\rangle = \psi(\vec{x})$ und die Impulsraum-Wellenfunktion $\langle\vec{p}|\psi\rangle = \tilde{\psi}(\vec{p})$.

(a) Bestimmen Sie die folgende Ausdrücke in einer Dimension:
$\langle x|X|p\rangle,\ \langle p|X|x\rangle,\ \langle x|X|x'\rangle,\ \langle p|X|p'\rangle$

(b) Bestimmen Sie die folgende Ausdrücke in drei Dimensionen:
$\langle\vec{x}|\vec{P}|\vec{x}'\rangle,\ \langle\vec{p}|\vec{P}|\vec{x}'\rangle$

(c) Bestimmen Sie die folgende Ausdrücke in drei Dimensionen (m reell und positiv):
$\langle\vec{x}|\frac{1}{|\vec{X}|}e^{-m|\vec{X}|}|\vec{x}'\rangle,\ \langle\vec{x}|\frac{1}{|\vec{X}|}e^{-m|\vec{X}|}|\psi\rangle,\ \langle\vec{p}|\frac{1}{|\vec{X}|}e^{-m|\vec{X}|}|\psi\rangle$

7) Zweidimensionaler Hilbertraum und Darstellung von Bra- und Ket-Vektoren

Durch $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ sei in einem zweidimensionalen komplexwertigen Hilbertraum eine orthonormierte Basis gegeben ("a-Darstellung"). Zwei Vektoren seien durch

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle + i\,|a_2\rangle) \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle - i\,|a_2\rangle)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$ ebenfalls eine Orthonormalbasis bilden ("b-Darstellung").

(b) Geben Sie die Koordinaten-Darstellung der Ket-Vektoren $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ und der jeweiligen Bra-Vektoren in der a-Darstellung an.

(c) Bestimmen Sie die $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$ als Funktion der $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ und bestimmen Sie die entsprechende Koordinaten-Darstellung.

(d) Bestimmen Sie die Einträge (als Funktion der Skalarprodukte $\langle b_i|a_j\rangle$, $i, j = 1, 2$) der 2×2 Matrix, welche die Vektoren in der a-Darstellung in die der b-Darstellung überträgt. Nutzen Sie dazu die in der Vorlesung diskutierten Vollständigkeitsrelationen.

8) Abstrakter linearer Operator

In einem komplexen Hilbertraum sei durch $T := |u\rangle\langle u|$ (mit $|u\rangle \neq 0$) ein linearer Operator definiert.

(a) Ist T Hermitesch?

(b) Welche Eigenschaft muss $|u\rangle$ besitzen, damit T ein Projektionsoperator ist?

(c) Sei B ein beliebiger linearer Operator. Zeige, dass die Spur des Operators TB durch $\langle u|B|u\rangle$ gegeben ist. Beachte, dass die Spur eines Operators nicht von der gewählten Basis abhängt.