Übungen zu T2, Sommersemester 2017, Blatt 4

1) Parameterintegral

Berechnen Sie das von dem Parameter $u > 0$ abhängige Integral

$$I(u) = \int_0^\infty dr\, e^{-ur}.$$

Berechnen Sie sodann

$$\int_0^\infty dr\, r^n\, e^{-ur}$$

($n \in \mathbb{N}$) aus $I(u)$ ohne eine erneute Integration durchzuführen.

2) Wasserstoff-Atom

Die Grundzustandswellenfunktion eines Elektrons im Wasserstoffatom hat die Form

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} \exp(-r/a).$$

Dabei ist $r = |\vec{x}|$ der Abstand vom Kern, $a = \hbar/m_e\alpha c$ der Bohrsche Radius, m_e die Masses des Elektrons und $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ die Feinstrukturkonstante.

(a) Welcher numerische Wert ergibt sich für den Bohrschen Radius?

(b) Wie ist $\mathcal{N}$ zu wählen, damit die Wellenfunktion richtig normiert ist?

Beachte: Die Wellenfunktion in dieser Aufgabe is eine Funktion von 3 Raumdimensionen, jedoch ist der Zustand $|\psi\rangle$ in einem unendlich dimensionalen Hilbertraum definiert. Benutzen Sie Kugelkoordinaten und nutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 1.

3) Gaußsches Integral

(a) Zeigen Sie, dass $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp(-ax^2) = \sqrt{\pi/a}$, wobei $a > 0$.

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, \exp(-ax^2)$.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2\, \exp(-ax^2)$.

(d) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^n\, \exp(-ax^2)$, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist.

4) Gaußsche Wellenfunktion

In einer Raumdimension sei die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \mathcal{N} \exp(-x^2/4\sigma^2)\,, \qquad (\sigma \in \mathbb{R}^+)$$

gegeben.

(a) Wie ist der Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ zu wählen?

(b) Was erhält man für den Erwartungswert bei der Messung des Orts?

(c) Ist das Quadrat des Ortsoperators X^2 eine Hermitescher Operator? Was ergibt sich für den Erwartungswert bei der Messung von X^2?

(d) Bestimmen die zu erwartende Standardabweichung Δx, die sich bei im Limes unendlich vieler Ortsmessungen (an identischen Kopien, die sich alle im Zustand $\psi(x)$ befinden) ergibt.

5) Rechnen mit Observablen in einem endlich-dimensionalen Hilbertraum

Es sei $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ der Hilbertraum komplexer 3-dimensionaler Vektoren mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle\chi|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{3} \chi_k^* \psi_k$. Eine bestimmte Observable sei durch die Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left[\, |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

dargestellt.

(a) Was sind die möglichen Messwerte a_1, a_2, a_3 dieser Observablen?

(b) Bestimmen Sie zugehörige orthonormierte Eigenvektoren, welche nur bis auf eine komplexe Phase eindeutig sind.

(c) Geben Sie für jeden der möglichen Messwerte $a_1, \ldots$ die Wahrscheinlichkeit an, ihn bei eine Messung im Zustand $|\phi\rangle$ zu erhalten.

6) Räumliche Translation

Die Wirkung des Operators T_a auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$ (in einer Raumdimension) sei durch

$$(T_a\psi)(x) = \psi(x-a), \quad a \in \mathbb{R}$$

definiert. Geben Sie eine anschauliche Interpretation der Wirkung von T_a. Was ergibt sich für das Produkt $T_a T_b$? Was ergibt sich für $T_a^\dagger$, $T_a^\dagger T_a$ und $T_a T_a^\dagger$? Klassifizieren Sie die Operatoren T_a bezüglich der in der Vorlesungen besprochen Eigenschaften (Linearität, Unitarität, Hermitizität).

7) Gruppeneigenschaften

Zeigen Sie, dass $\{T_a | a \in \mathbb{R}\}$ bezüglich des Produkts $T_a T_b$ eine abelsche Gruppe bildet.