Übungen zu T2, Sommersemester 2017, Blatt 3

1) Photoeffekt

Beim Photoeffekt werden durch Einstrahlung von Licht Elektronen aus dem Metallverband gelöst. Welcher Spannung entspricht die Austrittsarbeit, wenn die Elektronen durch Licht der Wellenlänge 500 nm gerade herausgelöst werden?

2) Natürliche Einheiten

Drücken Sie die folgenden Größen in Einheiten von eV (zur entsprechenden Potenz) aus unter der Benutzung on natürlichen Einheiten $\hbar = c = k = 1$): typische atomarer Radius (1 $\AA$), typische Nucleonradius (1 fm), Compton-Wellenlänge des Elektrons, Graviationsbeschleunigung g auf der Erdoberfläche, Temperatur im ITER Tokamak, die benötigt wird, um Kernfusion in Gang zu bringen. Nutzen Sie das WWW, um Ihnen unbekannte Zahlen zu finden.

3) Wellenfunktion

Eine Wellenfunktion eines Teilchens in einem eindimensionalen System sei gegeben durch

$$\psi(x) = \begin{cases} \mathcal{N} & \text{für} \quad x \in [a, b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Normierungsfactor $\mathcal{N}$, den Erwartungswert $\langle x \rangle$ für die Position des Teilchens, den Erwartungswert $\langle x^2 \rangle$ und das Schwankungsquadrat (Varianz) $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Berechnen Sie für den Fall $a = 0$, $b = 3$ die Wahrscheinlichkeit, bei einer Positionsmessung, das Teilchen im Intervall $[-2, 10.5]$ zu finden.

4) Binomialverteilung

Ein (reiner) Zustand eines spinlosen Teilchens in 3 Dimensionen sei durch die Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ beschrieben. Ein Detektor D soll feststellen können, ob sich das Teilchen innerhalb des Gebiets $V \subset \mathbb{R}^3$ befindet. Ein zweiter Detektor D' soll registrieren, ob sich das Teilchen außerhalb des Gebietes V aufhält. Wir führen diese Messung an N gleich präparierten Kopien des Systems durch. Bei einer gegebenen Kopie des Systems spricht jeweils **genau einer** der Detektoren an. Die Wahrscheinlichkeit p, dass das Teilchen im Gebiet V nachgewiesen wird, ist durch $p = \int_V d^3\vec{x}\, |\psi(\vec{x})|^2$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen außerhalb von V registriert wird, ist daher $1 - p$. Die Wahrscheinlichkeit w_n, dass das Teilchen bei genau n der N Kopien im Gebiet V nachgewiesen wird, ist durch die Binomialverteilung

$$w_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^n (1-p)^{N-n}$$

gegeben. Der Mittelwert $\bar{n}$ und die Schwankung (Standardabweichung) Δn (und auch höhere Momente) von n lassen sich sehr leicht mit Hilfe der charakteristischen Funktion

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{N} w_n e^{nx}$$

bestimmen. Berechnen[1] Sie zunächst $\phi(x)$ und damit dann $\bar{n}/N$ und $\Delta n/N$. Diskutieren Sie das Verhalten für $N \to \infty$.

In welchem prinzipiellen Zusammenhang stehen diese Ergebnisse mit denen, die Sie in Aufgabe 3 berechnet haben?

4) Diracsche δ-Funktion in 1 Dimension

Die Diracsche δ-Funktion ist eine Distribution deren Eigenschaften mittels ihrer Wirkung auf Testfunktionen $f(x)$ in Integrationen definiert werden kann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}\, f(\bar{x})\, \delta(x-\bar{x}) = f(x)\,,$$

und wobei $\bar{x}$ reel ist, $\delta(x) = \delta(-x)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-\bar{x}) = 1$ gelten und f eine (zumindest an der Stelle x) stetige Funktion sein soll. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Diracsche δ-Funktion für Integrationen über beliebige Testfunktionen gültig sind:

(a) $x\,\delta(x) = 0 \qquad x\,\delta(x-\bar{x}) = \bar{x}\,\delta(x-\bar{x})\,,$

(b) $f(x)\,\delta(x-\bar{x}) = f(\bar{x})\,\delta(x-\bar{x})\,,$

(c) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, a reell und endlich,

(d) $\delta((x-a)(x-b)) = \frac{1}{|a-b|}[\delta(x-a) + \delta(x-b)]$, a, b reell und verschieden.

Beachten Sie: Da die Eigenschaften für beliebige Testfunktionen gelten, können Sie diese Eigenschaften auch als direkte Eigenschaften der δ-Funktion selber betrachten.

---

[1] Erst mal alles hinschreiben und in Ruhe draufschauen!