

Übungen zu T2, Sommersemester 2017, Blatt 2

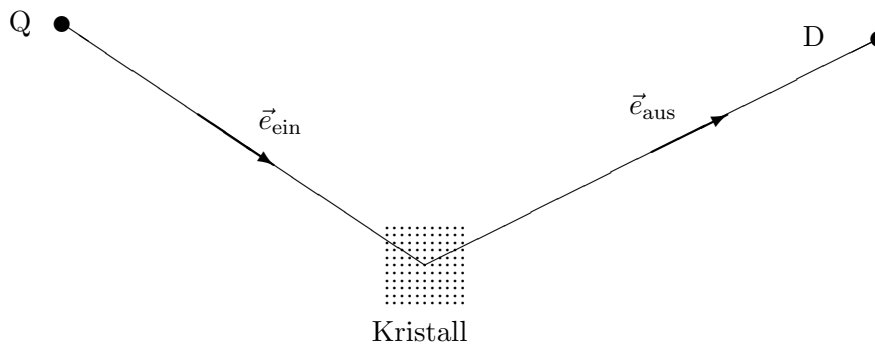
1) de Broglie-Wellenlängen

Berechnen Sie die de Broglie-Wellenlänge eines Protons mit einer kinetischen Energie von 1 eV, 100 eV, 100 keV ($m_p \simeq 938 \text{ MeV}/c^2$). Wie groß ist die de Broglie-Wellenlänge eines Menschen mit einer Masse von 70 kg, der sich mit 1 m/s bewegt? Welche Schlussfolgerung können Sie ziehen im Bezug auf die Frage nach dem Wellen-Charakter eines Menschen, wenn Sie die Ergebnisse mit der Größe des Protons bzw. des Menschen vergleichen?

2) De Broglie-Wellenlänge nichtrelativistischer Teilchen

Geben Sie die allgemeine (relativistische) Beziehung zwischen der de Broglie-Wellenlänge und der **kinetischen Energie** $T = E - mc^2$ eines massiven Teilchens ($m \neq 0$) an. Bestimmen Sie eine Näherungsformel für den nichtrelativistischen Grenzfall ($T \ll mc^2$).

3) Neutronenstreuung



An den Punkten $\vec{x}_{\vec{n}} = a\vec{n}$, $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$, $n_i = -N, -N + 1, \dots, N$ ($i = 1, 2, 3$) befinden sich die Atome eines Kristallgitters. Von einer am Punkt $\vec{x}_Q = -R_Q \vec{e}_{\text{ein}}$ ($|\vec{e}_{\text{ein}}| = 1$) befindlichen Quelle Q ($R_Q \gg Na$) werden kohärent Neutronen mit dem Impuls p emittiert. Am Punkt $\vec{x}_D = R_D \vec{e}_{\text{aus}}$ ($|\vec{e}_{\text{aus}}| = 1$) befindet sich ein Neutronendetektor ($R_D \gg Na$). Die Amplitude $\langle D \text{ aus} | Q \text{ ein} \rangle$, dass das bei Q emittierte Neutron im Detektor D nachgewiesen wird, ist von der Form

$$\langle D \text{ aus} | Q \text{ ein} \rangle \sim \sum_{\vec{n}} \frac{e^{ip|\vec{x}_Q - \vec{x}_{\vec{n}}|/\hbar}}{|\vec{x}_Q - \vec{x}_{\vec{n}}|} W_{\vec{n}} \frac{e^{ip|\vec{x}_D - \vec{x}_{\vec{n}}|/\hbar}}{|\vec{x}_D - \vec{x}_{\vec{n}}|}.$$

(Mehrfachstreuung wird vernachlässigt.) Berechnen Sie diesen Ausdruck unter der Annahme, dass $W_{\vec{n}}$ für alle Atome gleich ist. Verwenden Sie für $|\vec{x}_Q - \vec{x}_{\vec{n}}| = \sqrt{(\vec{x}_Q - \vec{x}_{\vec{n}})^2}$

eine Näherungsformel, die der Tatsache Rechnung trägt, dass $|\vec{x}_Q| = R_Q \gg |\vec{x}_{\vec{n}}|$ ist. (Analog für $|\vec{x}_D - \vec{x}_{\vec{n}}|$.) Auf diese Weise sollten Sie den Ausdruck

$$\langle D \text{ aus} | Q \text{ ein} \rangle \sim \sum_{\vec{n}} e^{ipa\vec{\Delta}\cdot\vec{n}/\hbar} = \prod_{i=1}^3 \sum_{n_i=-N}^N e^{ipa\Delta_i n_i/\hbar}, \quad \vec{\Delta} = \vec{e}_{\text{ein}} - \vec{e}_{\text{aus}}$$

erhalten. Man muss also eine geometrische Reihe vom Typ

$$s(\alpha) = \sum_{n=-N}^N e^{i\alpha n}$$

berechnen. Zeigen Sie, dass die Summation

$$s(\alpha) = \frac{\sin \alpha(N + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

ergibt. Diskutieren Sie das Verhalten dieser Funktion. Für welche Werte von α hat sie scharfe Extrema? Zeigen Sie, dass man daher bei der Neutronenstreuung an dem Kristall für

$$\frac{pa}{2\pi\hbar} \vec{\Delta} = \vec{v} \in \mathbb{Z}^3$$

scharfe Interferenzmaxima beobachtet. Das ist die Lauesche Interferenzbedingung für ein einfaches kubisches Gitter. Man kann sie auch in der Form

$$\frac{a}{2\pi} (\vec{k}_{\text{ein}} - \vec{k}_{\text{aus}}) = \vec{v} \in \mathbb{Z}^3$$

schreiben.