Übungen zu T2, Sommersemester 2016, Blatt 12

1) Spin-1

In einem Spin 1-System sei der Eigenzustand von S_3 zum Eigenwert 0 präpariert. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten bei einer Messung von S_1 die Messwerte $+\hbar$, 0, bzw. $-\hbar$ zu erhalten?

2) Spin-Operator

Gegeben sei der Spin-Operator $\vec{S}$ in der fundamentalen (Spin-1/2) Darstellung der SU(2). Dieser ist ein sogenannter Vektor-Operator, da er drei Komponenten für die drei kartesischen Koordinaten hat. Berechnen Sie den Vektor-Operator $\vec{S} \times \vec{S}$.

3) Spin-1-Darstellung und adjungierte Darstellung der SU(2)

Bestimmen Sie die unitäre Matrix U, die zwischen der Basis der Spin-1 und der Basis der adjungierten Darstellung transformiert, i.e. es gilt $T_k = U t_k U^\dagger$, wobei die T_k die Drehimpuls-Operatoren der Spin-1 Darstellung sind und die t_k die Drehimpuls-Operatoren der adjungierten Darstellung ($k = 1, 2, 3$), die in der Vorlesung diskutiert wurden. Bestimmen Sie dafür die Eigenvektoren zu T_3 und t_3 und überlegen Sie sich, wie diese in die $U^\dagger$-Matrix eingehen. Ist U eindeutig?

4) Kugelflächen-Funktionen

Ermitteln Sie die fünf Kugelfunktionen zum Drehimpuls $\ell = 2$, indem Sie L_- genügend oft auf auf $Y_{\ell\ell}$ anwenden.

5) Parität

Der Paritätsoperator Π ist (in der Ortsdarstellung) durch $(\Pi\psi)(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$ definiert. Man zeige, dass Π selbstadjungiert ist und $\Pi^2 = 1$ gilt. Wie wirkt Π auf die Wellenfunktion $\psi(\vec{x}) = u(r)\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ in Kugelkoordinaten? Zeigen Sie aus den in der Vorlesung besprochenen Form der Kugelfächen-Funktionen und den Eigenschaften der assoziierten Legendre-Polynome, dass diese Wellenfunktion eine Eigenfunktionen der Observablen „Parität“ ist mit Eigenwert $(-1)^\ell$.

6) Parität

Formulieren Sie, wie die Parität auf die Vektor-Operatoren $\vec{P}, \vec{X}$ wirkt. Zeigen Sie, dass die Parität eine Erhaltungsgröße ist ($d\Pi/dt = 0$), falls der Hamiltonoperator durch $H = \vec{P}^{\,2}/2m + V(|\vec{X}|)$ gegeben ist. Wie wirkt Parität auf den Drehimpuls-Operator $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$?