Übungen zu T2, Sommersemester 2016, Blatt 11

1) Harmonischer Oszillator im Heisenbergbild

Gegeben sei der eindimensionale harmonische Oszillator,

$$H = P^2/2m + m\omega^2 X^2/2.$$

Ermitteln Sie die Zeitentwicklung des Orts- und des Impulsoperators mit Hilfe der Heisenbergschen Bewegungsgleichungen. Geben Sie den Zusammenhang der Orts- und Impulsschwankungen zum Zeitpunkt t mit jenen zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem beliebigen Zustand an. Was ergibt sich, falls zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Zustand mit minimalem Unschärfeprodukt vorliegt? Was erhält man, wenn außerdem $\Delta X(0) = \Delta P(0)/m\omega$ erfüllt ist?

2) Spin-Präzession im zeitlich konstanten Magnetfeld

Gegeben sei ein Spin-1/2-System mit dem Hamiltonoperator

$$H = -\vec{\mu}\,\vec{B}\,, \qquad \vec{\mu} = \gamma\vec{S}\,, \qquad \vec{B} = B\,\vec{e}_z\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Heisenberg-Gleichungen für den Heisenberg-Spinoperator $\vec{S}_H(t)$ und lösen Sie diese mit der Anfangsbedingung, dass die Heisenberg-Spinoperatoren bei $t = 0$ mit jeweiligen den Schrödinger-Spinoperatoren übereinstimmen, $\vec{S}_H(0) = \vec{S}_S$.

(b) Lösen Sie das Problem im Schrödingerbild für die zweikomponentige Spinorwellenfunktion

$$\begin{pmatrix} a_+(t) \\ a_-(t) \end{pmatrix}$$

(c) Illustrieren Sie Äquivalenz beider Lösungen, indem Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte für einen Spinzustand, der bei $t = 0$ genau in x-Richtung zeigt, im Heisenbergbild und im Schrödingerbild ausrechnen.

3) Bahndrehimpuls

Zeigen Sie, dass die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators

$$L_k = \varepsilon_{klm} X_l P_m$$

die folgenden Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$[L_k, L_l] = i\hbar\varepsilon_{klm} L_m, \quad [L_k, X_l] = i\hbar\varepsilon_{klm} X_m, \quad [L_k, P_l] = i\hbar\varepsilon_{klm} P_m.$$

Hinweis: Benützen Sie die Vertauschungsrelationen $[X_k, P_l] = i\hbar\delta_{kl}$ und $[X_k, X_l] = [P_k, P_l] = 0$ ohne Bezugnahme auf eine konkrete Darstellung.

4) Translationen

Zeigen Sie, für eine endliche Translation, dass folgende Relation gilt:

$$\exp(-i\vec{a}\,\vec{\mathbf{P}}/\hbar)\, f(\vec{\mathbf{X}})\, \exp(i\vec{a}\,\vec{\mathbf{P}}/\hbar) \;=\; f(\vec{\mathbf{X}} - \vec{a}\,\mathbb{1})\,,$$

wobei $\vec{\mathbf{X}}$ und $\vec{\mathbf{P}}$ die abstrakten Orts- und Impulsoperatoren sind.