Übungen zu T2, Sommersemester 2016, Blatt 10

1) Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen erfüllt sind:

a) $[\sigma_k, \sigma_l] = 2i\varepsilon_{klm}\sigma_m$ (beachte Summenkonvention)

b) $\sigma_k\sigma_l + \sigma_l\sigma_k = 2\delta_{kl}\mathbb{1}_2$

c) $\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl}\mathbb{1}_2 + i\varepsilon_{klm}\sigma_m$

d) $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\mathbb{1}_2 + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}, \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

3) Spin-Messungen

Gegeben sei anfangs ein Spin-1/2 System das sich in einem reinem Spinzustand $\chi_{z,+}$ befindet, wobei der Spin in z-Richtung zeigt.

(a) Zu welchem Spin-Operator is $\chi_{z,+}$ Eigenzustand und mit welchem Eigenwert?

(b) Mit welchen Wahrseinlichkeiten werden bei einer Messung des Spins in x-Richtung die Werte $\pm\hbar/2$ gemessen? Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich bei der Messung des Spins in y-Richtung? Welche Erwartungswerte ergeben sich jeweils?

(c)Nehmen Sie an, Sie erhalten bei der idealen Messung des Spins in x-Richtung den Wert $-\hbar/2$. Das heisst, dass der Spin nach der Messung noch vorhanden und nicht zerstrt ist. In welchem Zustand befindet sich der Spin nach der Messung? Fhren Sie danach an diesem Spin erneut eine Messung des Spins in z-Richtung durch. Mit welchen Wahrseinlichkeiten werden bei dieser Messung des Spins in x-Richtung die Werte $\pm\hbar/2$ gemessen?

3) Magnetisches Moment im thermodynamischen Gleichgewicht

Gegeben sei ein Spin-1/2 System in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_3$. Der Operator des magnetischen Moments ist $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ und der Hamiltonoperator ist $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Befindet sich der Spin in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T, so beschreibt die Dichtematrix

$$\rho = \mathcal{N} \exp(-\beta H), \quad \beta = 1/kT$$

den entsprechenden Gleichgewichtszustand. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor $\mathcal{N}$. Berechnen Sie die Erwartungwerte und Schwankungsquadrate von μ_i $(i = 1, 2, 3)$ und H. Skizzieren Sie den Erwartungswert von μ_3 als Funktion der Temperatur T.

4) Verhalten von Dichtematrizen bei räumlichen Drehungen

Es sei $U(\theta\,\vec{e_3})$ die Spin-1/2 Rotationsmatrix, die einen Zustand aktiv um einen Winkel θ um die z-Achse dreht.

(a) Zeigen Sie:

$$U(\theta\,\vec{e_3})(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})U(\theta\,\vec{e_3})^\dagger = \vec{n}'\cdot\vec{\sigma}, \qquad \vec{n}\in\mathbb{R}^3,$$

wobei $\vec{n}' = R(\theta\,\vec{e_3})\vec{n}$ gilt und $R(\vec{\alpha})$ die räumliche Drehmatrix ist, welche Vektoren um den Winkel $|\vec{\alpha}|$ um die Achse $\vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$ dreht.

(b) Nutzen Sie das Ergebnis von (a) um das Transformationsverhalten der Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 + \vec{n}\cdot\vec{\sigma}), \qquad |\vec{n}| = 1.$$

bei der Rotation mit $U(\theta\,\vec{e_z})$ zu bestimmen, und zeigen argumentieren Sie, dass $U(\theta\,\vec{e_z})$ in der Tat die oben beschriebene physikalische Interpretation besitzt.

Beachte: In the Vorlesung wurde irrtümlich angegeben, dass $\vec{n}' = R(-\theta\,\vec{e_z})\vec{n}$ gelte. Das Skriptum wurde korrigiert.