Übungen zu T2, Sommersemester 2016, Blatt 9

1) Teilchenstreuung am Delta-Potential

Bestimmen Sie für das Delta-Potential aus Aufgabe (8.5) die Energieeigenlösung eines von links einlaufenden Teilchens ("Streulösung") analog zu den Ausführungen in der Vorlesung zu Kapitel 3.3. Sie müssen dazu eine Lösung der Eigenwertgleichung von H für positive Energien E bestimmen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen relektiert bzw. transmittiert wird. Skizzieren Sie die Abhängigkeit dieser Wahrscheinlichkeiten von der Energie E.

2) Allgemeine Form der Unschärferelation für beliebige Zustände

Das Schwankungsquadrat $(\Delta_\omega A)^2$ einer Observablen A im Zustand ω ist durch

$$(\Delta_\omega A)^2 = \omega((A - \omega(A))^2)$$

definiert. Es seien nun $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$ seien zwei hermitesche Operatoren. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Zustand ω stets Ungleichung

$$\Delta_\omega A \Delta_\omega B \geq |\omega(\frac{i}{2}[A, B])|.$$

erfüllt ist. Benützen Sie dafür den (nicht-Hermiteschen) Operator

$$C = \frac{A - \omega(A)}{\Delta_\omega A} + i\frac{B - \omega(B)}{\Delta_\omega B}$$

und die allgemeinen Funktional-Eigenschaften (a)-(c) des Zustands ω aus Kapitel 4.2.

3) Gemischter Zustand I

Zeigen Sie, dass ein Zustand, der durch die Dichtematrix ρ dargestellt ist, genau dann ein gemischer Zustand ist, wenn $\rho^2 \neq \rho$ gilt.

4) Gemischter Zustand II

Zeigen Sie, dass ein Zustand, der durch die Dichtematrix ρ dargestellt ist, genau dann ein gemischer (reiner) Zustand ist, wenn $\mathrm{Tr}[\rho^2] < 1$ ($\mathrm{Tr}[\rho^2] = 1$) gilt.

5) Harmonischer Oszillator im Thermischen Gleichgewicht

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit Winkelfrequenz ω, welcher im thermischen Gleichgewicht ist mit einem äußeren Wärmebad mit der absoluten Temperatur T. Die Dichtematrix hat dann die Form

$$\rho = \frac{\exp(-\mathbf{H}/kT)}{\mathrm{Tr}[\exp(-\mathbf{H}/kT)]},$$

wobei $\mathbf{H}$ der Hamiltonoperator ist und k die Boltzmann-Konstante.

(a) Bestimmen Sie die Spektraldarstellung des gemischten Zustandes ρ in Bra-Ket-Notation als Funktion der Temperatur, wobei $|\phi_n\rangle$ der normierte Eigenzustand zur Besetzungszahl n sei. Für die Berechnungen ist die Summationsformel für die geometrische Reihe sehr nützlich.

(b) Berechnen Sie die mittlere Besetzungszahl $\langle N\rangle$ und die mittlere Energie $\langle H\rangle$ als Funktion der Temperatur T. ($\langle N\rangle = (\exp(\hbar\omega/kT) - 1)^{-1}$)

(c) Berechnen Sie die mittlere Besetzungszahl für sichtbares Licht ($\lambda = 550$nm) bei Raumtemperatur ($T = 295$K) und an der Oberfläche der Sonne ($T = 5500$K).