Übungen zu T2, Sommersemester 2016, Blatt 7

1) Leiteroperatoren

Die Leiteroperatoren eines eindimensionalen harmonischen Oszillators $a, a^\dagger$ erfüllen die Vertauschungsrelation $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$. Zeigen Sie:

1. $\left[a, (a^\dagger)^n\right] = n(a^\dagger)^{n-1}$
2. $\left[a, f(a^\dagger)\right] = f'(a^\dagger)$

Nehmen Sie an, dass die Funktion f als Potenzreihenentwicklung definiert ist.

2) Kohärenter Zustand I

Der Zustand $|z\rangle \equiv |\psi_z\rangle$ (mit $z \in \mathbb{C}$) eines harmonischen Oszillators sei durch die Eigenwertgleichung $a|z\rangle = z|z\rangle$ definiert. Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Gleichung durch

$$|z\rangle = Ce^{za^\dagger}|0\rangle$$

gegeben ist. Nutzen Sie die in Aufgabe (1) hergeleiteten Formeln. Der Zustand $|z\rangle$ ist ein Beispiel fŕ einen kohärenten Zustand.

3) Kohärenter Zustand II

Schreiben Sie den kohärenten Zustand $|z\rangle$ als Linearkombination der normierten Energieeigenzustände $|n\rangle \equiv |\phi_n\rangle$ des harmonischen Oszillators. Bestimmen Sie $\langle n|z\rangle$. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor C (abgesehen von einem willkürlich wählbaren Phasenfaktor $e^{i\alpha}$) durch die Normierungsbedingung $\langle z|z\rangle = 1$.

4) Erwartungswerte für den Harmonischen Oszillator

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X\rangle_n$, $\langle P\rangle_n$, $\langle X^2\rangle_n$, $\langle P^2\rangle_n$ für die Energieeigenzustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators. Nutzen Sie die algebraische Methode mit Hilfe der Leiteroperatoren.

5) Eindeutigkeit der Eigenzustände

Zeigen Sie für den eindimensionalen harmonischen Oszillators, dass – unter der Annahme der Eindeutigkeit des Grundzustands – es zu jedem Energieeigenwert $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ genau einen einzigen zugehörigen Eigenzustand gibt. Es genügt, wenn Sie die analoge Behauptung fŕ den Zähloperator N beweisen.

6) Vollständigkeit

Zeigen Sie, dass mit den Energie-Eigenzuständen $|n\rangle \equiv |\phi_n\rangle$ wirklich alle Eigenzustände des eindimensional harmonischen Oszillators identifiziert sind. Beweisen Sie durch Widerspruch, indem Sie annehmen, es gäbe für den Zähloperator N den Eigenzustand $|\nu\rangle$

mit dem Eigenwert $\nu = n+\alpha$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha < 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Zustandes $a^{n+1}|\nu\rangle$, dass sich dadurch ein Widerspruch zu den allgemeinen Eigenschaften des eindimensional harmonischen Oszillators ergibt.