Übungen zu T2, Sommersemester 2016, Blatt 4

1) Parameterintegral

Berechnen Sie das von dem Parameter $u > 0$ abhängige Integral

$$I(u) = \int_0^\infty dr\, e^{-ur}.$$

Berechnen Sie sodann

$$\int_0^\infty dr\, r^n\, e^{-ur}$$

($n \in \mathbb{N}$) aus $I(u)$ ohne eine erneute Integration durchzuführen.

2) H-Atom

Die Grundzustandswellenfunktion eines Elektrons im Wasserstoffatom hat die Form

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} \exp(-r/a).$$

Dabei ist $r = |\vec{x}|$ der Abstand vom Kern, $a = \hbar/m_e \alpha c$ der Bohrsche Radius, m_e die Masses des Elektrons und $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante.

(a) Welcher numerische Wert ergibt sich für den Bohrschen Radius?

(b) Wie ist $\mathcal{N}$ zu wählen, damit die Wellenfunktion richtig normiert ist?

Hinweis: Seinen Sie effizient und nutzen Sie Resultate aus früheren Aufgaben.

3) Erwartungswert

Berechnen Sie die Erwartungswerte von r^{-1}, r und r^2 in dem durch die Wellenfunktion von Aufgabe 2 beschriebenen Zustand.

4) Gaußsches Integral

(a) Zeigen Sie, dass $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp(-ax^2) = \sqrt{\pi/a}$, wobei $a > 0$.

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, \exp(-ax^2)$.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2\, \exp(-ax^2)$.

(d) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^n\, \exp(-ax^2)$, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist.

5) Gaußsche Wellenfunktion

In einer Raumdimension sei die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \mathcal{N} \exp(-x^2/4\sigma^2)\,, \qquad (\sigma \in \mathbb{R}^+)$$

gegeben.

(a) Wie ist der Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ zu wählen?

(b) Was erhält man für den Erwartungswert bei der Messung des Orts?

(c) Ist das Quadrat des Ortsoperators X^2 eine Hermitescher Operator? Was ergibt sich für den Erwartungswert bei der Messung von X^2?

(d) Bestimmen die zu erwartende Standardabweichung Δx, die sich bei im Limes unendlich vieler Ortsmessungen (an identischen Kopien, die sich alle im Zustand $\psi(x)$ befinden) ergibt.

6) Räumliche Translation

Die Wirkung des Operators T_a auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$ (in einer Raumdimension) sei durch

$$(T_a\psi)(x) = \psi(x-a), \quad a \in \mathbb{R}$$

definiert. Geben Sie eine anschauliche Interpretation der Wirkung von T_a. Was ergibt sich für das Produkt T_aT_b? Was ergibt sich für $T_a^\dagger$, $T_a^\dagger T_a$ und $T_aT_a^\dagger$? Klassifizieren Sie den Operatoren T_a bezüglich der in der Vorlesungen besprochen Eigenschaften (Linearität, Unitarität, Hermitizität).

7) Gruppeneigenschaften

Zeigen Sie, dass $\{T_a | a \in \mathbb{R}\}$ bezüglich des Produkts T_aT_b eine abelsche Gruppe bildet.

8) Projektionsoperatoren

(a) Zeigen Sie, dass $PQ = 0$ notwendig und hinreichend dafür ist, dass mit P und Q auch $P + Q$ ein Projektionsoperator ist.

(b) Zeigen Sie, dass $[P_1, P_2] = 0$ notwendig und hinreichend dafür ist, dass mit P_1 und P_2 auch P_1P_2 ein Projektionsoperators ist.