

8. Wechselwirkungsbild und Störungsreihe

Hamiltonoperator $H = \underbrace{H_0}_{\text{"freier" Teil}} + \underbrace{H_{\text{int}}}_{\text{Wechselwirkungs-Teil}}$ (Ann.: zeitunabh.)

Wechselwirkungsbild

W... Wechselwirkungsbild

S... Schrödingerbild

H... Heisenbergbild

Zeitentwicklung der Operatoren im Wechselwirkungsbild definiert durch:

$$A_W(t) := e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t} \quad (\text{freie Zeitentwicklung})$$

⇒ Zeitentwicklung der Zustandsvektoren im Wechselwirkungsbild festgelegt, da Erwartungswerte natürlich in allen Bildern gleich:

$$\langle \psi_S(0) | \underbrace{e^{iHt} A_S e^{-iHt}}_{\psi_S(t)} \rangle =$$

$$= \langle \psi_S(0) | \underbrace{e^{iHt} e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt}}_{A_W(t)} \underbrace{\psi_S(0)}_{\psi_W(t)} \rangle$$

$$\psi_w(t) = e^{iH_0 t} \underbrace{e^{-iHt} \psi_s(0)}_{\psi_s(t)} = \underbrace{e^{iH_0 t} e^{-iHt}}_{=: U(t)} \psi_H$$

Differentialgleichung für $U(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= \frac{d}{dt} (e^{iH_0 t} e^{-iHt}) = e^{iH_0 t} (iH_0 - iH) e^{-iHt} \\ &= -i e^{iH_0 t} H_{int} e^{-iHt} = -i \underbrace{e^{iH_0 t} H_{int} e^{-iH_0 t}}_{H_{int,w}(t)} \underbrace{e^{iH_0 t} e^{-iHt}}_{U(t)} \end{aligned}$$

$$\text{m. a. W.: } i \frac{d}{dt} \psi_w(t) = H_{int,w}(t) \psi_w(t)$$

$\uparrow$
zeitabhängig!

Zusammenhang zwischen $\psi_w(t_0)$ und $\psi_w(t)$:

$$\psi_w(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt} \psi_H = U(t) \psi_H$$

$$\psi_w(t_0) = e^{iH_0 t_0} e^{-iHt_0} \psi_H = U(t_0) \psi_H$$

$$\Rightarrow \psi_w(t) = \underbrace{U(t) U(t_0)^{-1}}_{=: U(t, t_0)} \underbrace{U(t_0) \psi_H}_{\psi_w(t_0)}$$

$$U(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iHt} e^{iHt_0} e^{-iH_0 t_0}$$

$U(t, t_0)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = -i H_{\text{int}, W}(t) U(t, t_0)$$

mit der Anfangsbedingung $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$

$$\int_{t_0}^t d\tau \left| \frac{\partial U(\tau, t_0)}{\partial \tau} = -i H_{\text{int}, W}(\tau) U(\tau, t_0) \right.$$

$$U(t, t_0) - \underbrace{U(t_0, t_0)}_{\mathbb{1}} - i \int_{t_0}^t d\tau H_{\text{int}, W}(\tau) U(\tau, t_0)$$

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t d\tau H_{\text{int}, W}(\tau) U(\tau, t_0)$$

$$= \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t d\tau H_{\text{int}, W}(\tau)$$

$$+ (-i)^2 \int_{t_0}^t d\tau H_{\text{int}, W}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} d\tau' H_{\text{int}, W}(\tau') U(\tau', t_0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t d\tau_n \int_{t_0}^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_1 H_{\text{int}, W}(\tau_n) \dots H_{\text{int}, W}(\tau_1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t d\tau_n \int_{t_0}^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_1 T[H_{\text{int}, W}(\tau_n) \dots H_{\text{int}, W}(\tau_1)]$$

$$T[A(t) B(t')] := \begin{cases} A(t) B(t') & \text{für } t > t' \\ B(t') A(t) & \text{für } t' > t \end{cases} \quad \text{WW4}$$

↑
zeitgeordnetes Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t d\tau_n \dots \int_{t_0}^t d\tau_1 T[H_{\text{int},W}(\tau_n) \dots H_{\text{int},W}(\tau_1)]$$

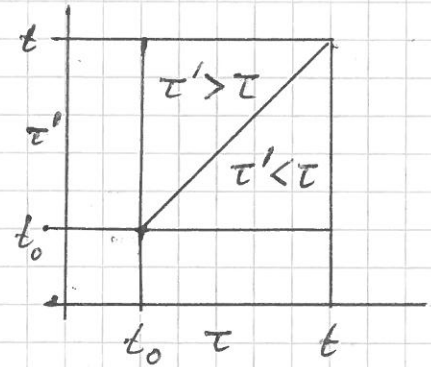
$$=: T e^{-i \int_{t_0}^t d\tau H_{\text{int},W}(\tau)}$$

Erläuterung des Auftretens der Zeitordnung (für $n=2$):

$$\int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' H_{\text{int},W}(\tau) H_{\text{int},W}(\tau') \quad \leftarrow \tau' < \tau$$

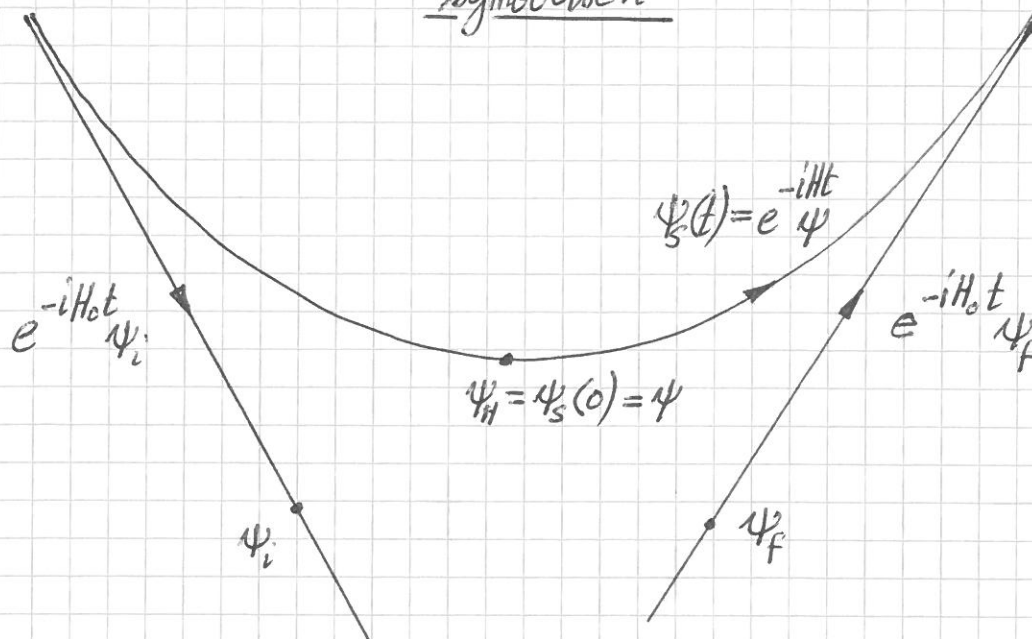
$$= \int_{t_0}^t d\tau' \int_{t_0}^{\tau'} d\tau H_{\text{int},W}(\tau') H_{\text{int},W}(\tau) \quad \leftarrow \tau < \tau'$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^t d\tau' T[H_{\text{int},W}(\tau) H_{\text{int},W}(\tau')]$$



Streutheorie :

symbolisch :



$$\psi_S(t) = e^{-iHt} \psi \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} e^{-iH_0 t} \psi_i \quad \text{"ein"-Asymptote}$$

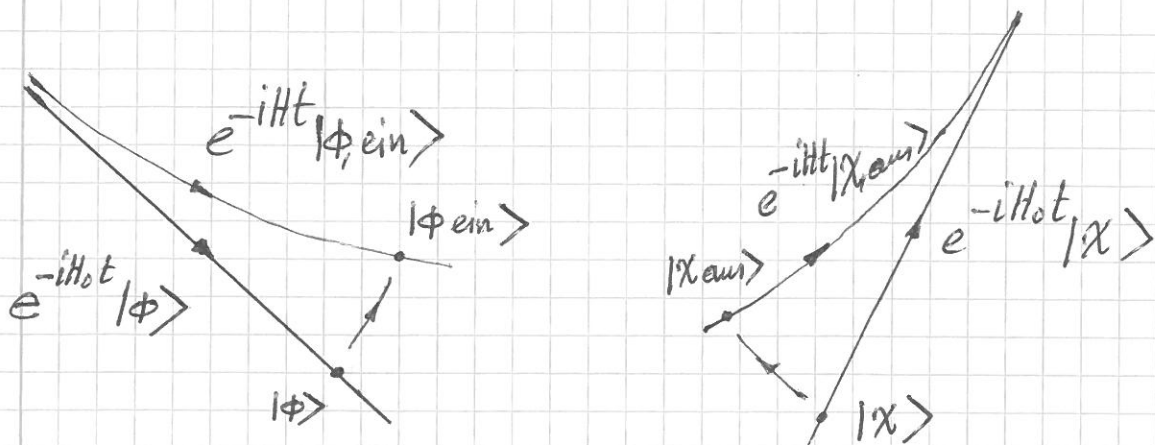
$$\psi_S(t) = e^{-iHt} \psi \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} e^{-iH_0 t} \psi_f \quad \text{"aus"-Asymptote}$$

$$\psi_W(t) = e^{iH_0 t} \psi_S(t) \Rightarrow \psi_W(-\infty) = \psi_i$$

$$\psi_W(+\infty) = \psi_f$$

Streuoperator (S-Operator)

WW6



$$|\langle \chi_{\text{aus}} | \phi_{\text{ein}} \rangle|^2 \quad \leftarrow \text{relevante GröÙe}$$

$$|\phi_{\text{ein}}\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} |\phi\rangle$$

$$|\chi_{\text{aus}}\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} |\chi\rangle$$

$$\langle \chi_{\text{aus}} | \phi_{\text{ein}} \rangle = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} \langle \chi | \underbrace{e^{iHt} e^{-iHt} e^{iHt_0} e^{-iH_0 t_0}}_{U(t, t_0)} | \phi \rangle$$

$$= \langle \chi | S | \phi \rangle$$

$$\text{mit } S = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} U(t, t_0) = T e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{\text{int}, W}(t)}$$

S-Operator