7. Grundzüge der Quantenelektrodynamik

bisher für Formulierung der Elektrodynamik Gauß-System verwendet

→ Lagrangedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (c=1)$

→ inhom. Maxwell-Gl. $\partial_\nu F^{\nu\mu} = 4\pi j^\mu$

Faktor 4π hat den „Vorteil", dass im Coulombgesetz kein $1/4\pi$ auftritt

aber: vor allem in der Teilchenphysik ist die Verwendung des Heaviside-Systems üblich. Man gelangt vom Gauß-System zum Heaviside-System durch

$$A_\mu \to \sqrt{4\pi}\, A_\mu \quad , \quad j_\mu \to \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, j_\mu$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$F_{\mu\nu} \to \sqrt{4\pi}\, F_{\mu\nu} \qquad q \to \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, q$$

$\Rightarrow \mathcal{L} \to -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$

$\Rightarrow$ Feldgl. $\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu$ (ohne 4π)

Verwenden ab jetzt das Heaviside-System!

QED2

Quantenelektrodynamik eines Spin-$\frac{1}{2}$-Feldes (z.B. $e^{\pm}$)

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}\,(i\not{\partial} - m)\,\psi - j^{\mu} A_{\mu}$$

$j^{\mu} = q\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ elektromagnetische 4-Stromdichte
q = elm. Ladung des Diracfeldes ψ
($q = -e$ für Elektronfeld)

Bem.: $\bar{\psi}\,(i\not{\partial} - m)\,\psi - q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} = \bar{\psi}\,[\,i\gamma^{\mu}\underbrace{(\partial_{\mu} + iq A_{\mu})}_{\text{kovariante Ableitung}} - m\,]\,\psi$

$$\rightarrow \quad \mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}\,(i\not{D} - m)\,\psi$$

$$D_{\mu} := \partial_{\mu} + iq A_{\mu}$$

$\mathcal{L}_{QED}$ ist invariant unter der lokalen $U(1)$-Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow e^{-iq\Lambda(x)}\,\psi(x)$$

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Lambda(x)$$

$$\partial_{\mu}\psi(x) \rightarrow \partial_{\mu}\left(e^{-iq\Lambda(x)}\,\psi(x)\right) =$$

$$= e^{-iq\Lambda(x)}\,[\,\partial_{\mu}\psi(x) - iq\,\partial_{\mu}\Lambda(x)\,\psi(x)\,]$$

$$i q A_\mu(x) \psi(x) \quad \longrightarrow \quad i q \left(A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \right) e^{-iq\Lambda(x)} \psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad D_\mu \psi = (\partial_\mu + i q A_\mu)\psi \longrightarrow e^{-iq\Lambda(x)} D_\mu \psi$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\psi}\, i \not{D} \psi \longrightarrow \overline{\psi}\, i \not{D} \psi \qquad \text{invariant}$$

$$\overline{\psi}\psi, \quad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \text{—//—}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}_{QED} \quad \text{invariant}$$

U(1) = <u>abelsche</u> Eichgruppe

QED = <u>abelsche Eichtheorie</u>

Feldgleichungen: $\quad (i\not{D} - m)\psi = 0$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = q \overline{\psi} \gamma^\mu \psi$$

<u>nichtlinear</u>!

Wegen Eichfreiheit $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ ist die in A_μ steckende Information redundant → Auferlegen einer <u>Eichbedingung</u>.

für das freie elm Feld hatten wir die Coulombeichung gewählt → wäre im Prinzip wieder möglich, jedoch ist ein „kovariante" Eichbedingung bequemer praktische Durchführung: Einführen eines <u>eich</u>fixierenden Terms in der Lagrangedichte (Fermi-Trick):

$$\mathcal{L}_{QED} \to \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \underbrace{- \frac{\overset{\swarrow \text{Eichparameter}}{\xi}}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2}_{\text{eichfixierender Term}} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

physikalische Größen hängen <u>nicht</u> von der Wahl des Eichparameters ξ ab!

$$\mathcal{L} = \underbrace{\overbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2}^{\text{bilinear in } A_\mu} + \overbrace{\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi}^{\text{bilinear in den Feldern}}}_{\substack{\mathcal{L}_0 \\ \text{„freie" Theorie}}} \underbrace{\overbrace{-q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}^{\text{kubisch i. d. Feldern}}}_{\substack{\mathcal{L}_{int} \\ \text{Wechselwirkungsterm}}}$$

keine exakte Lösung der nichtlinearen Feldgleichungen möglich $\to$ <u>Störungsentwicklung</u> möglich, falls $\mathcal{L}_{int}$ „klein" genug gegenüber $\mathcal{L}_0$ (im Fall der QED ist dies möglich, da $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \ll 1$ der relevante <u>Entwicklungsparameter</u> ist)