6. Quantisierung des freien Diracfeldes

Lagrangedichte des freien Diracfeldes

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(i\not{\partial} - m)\,\psi = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Diracindex } (a=1,2,3,4)}}{\bar{\psi}_a}\, i\,(\gamma^\mu)_{ab}\,\partial_\mu \psi_b - m\,\bar{\psi}_a \psi_a$$

$\Rightarrow$ Feldgleichung $\quad (i\not{\partial} - m)\,\psi(x) = 0$

allgemeine Lösung der freien Diracgleichung:

$$\psi(x) = \sum_s \int d\mu(p)\,[\,b(p,s)\,u(p,s)\,e^{-ipx} + d(p,s)^*\,v(p,s)\,e^{+ipx}\,]$$

$$\not{p}\,u(p,s) = m\,u(p,s)\,, \quad \not{p}\,v(p,s) = -m\,v(p,s)\,, \quad s = 1,2$$

$$p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}\,, \quad \bar{u}(p,r)\,u(p,s) = 2m\,\delta_{rs}$$

$$\bar{v}(p,r)\,v(p,s) = -2m\,\delta_{rs}$$

Fourierkoeffizienten b, d^* $\xrightarrow{\text{Quantisierung}}$ Operatoren $b, d^\dagger$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_a} = i\,\psi_a^\dagger = \pi_a\,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_a} = 0$$

$$\{\psi_a(t,\vec{x}),\, \underbrace{i\,\psi_b^\dagger(t,\vec{y})}_{\pi_b(t,\vec{y})}\} = i\,\delta_{ab}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

d.h. $\quad \{\psi_a(x),\, \psi_b^\dagger(y)\}\Big|_{x^0=y^0} = \delta_{ab}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$

$\{A, B\} = AB + BA$ Antikommutator

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}\Big|_{x^0=y^0} = 0 = \{\psi_a^\dagger(x), \psi_b^\dagger(y)\}\Big|_{x^0=y^0}$$

kanonische Vertauschungsrelationen sind <u>äquivalent</u> zu den folgenden Antivertauschungsregeln für b, d:

$$\{b(p,s), b(p',s')^\dagger\} = \{d(p,s), d(p',s')^\dagger\} = \delta(p,p')\,\delta_{ss'}$$

$$\delta(p,p') = (2\pi)^3\, 2p^0\, \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')$$

$$\{b, b\} = \{d, d\} = \{b, d\} = \{b, d^\dagger\} = 0$$

<u>Energie-Impuls-Vektor</u> des Diracfeldes

Energie-Impuls-Dichte: $T^{0\mu} = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\psi_a} \partial^\mu \psi_a - g^{0\mu}\mathcal{L}$

$$= i\psi_a^\dagger \partial^\mu \psi_a - g^{0\mu}\mathcal{L} = i\bar\psi \gamma^0 \partial^\mu \psi - g^{0\mu}\underbrace{\bar\psi(i\partial\!\!\!/ - m)\psi}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad P^\mu = \int d^3x \, :i\bar\psi\gamma^0\partial^\mu\psi: \; = \int d^3x \, :\psi^\dagger i \partial^\mu \psi:$$

Normalordnung

Einsetzen der Fourierzerlegung von ψ liefert:

$$P^\mu \overset{\text{ÜE}}{=} \sum_s \int d\mu(p)\, p^\mu \left[b(p,s)^\dagger b(p,s) + d(p,s)^\dagger d(p,s)\right]$$

D3

$$P^\mu = \sum_s \int [dn(p,s) + d\bar{n}(p,s)]\, p^\mu$$

$$dn(p,s) := d\mu(p)\; b(p,s)^\dagger\, b(p,s)$$

$$d\bar{n}(p,s) := d\mu(p)\; d(p,s)^\dagger\, d(p,s)$$

$$[P^\mu, b(p,s)] = -\, p^\mu\, b(p,s)$$
$$[P^\mu, b(p,s)^\dagger] = p^\mu\, b(p,s)^\dagger$$

$$[P^\mu, d(p,s)] = -\, p^\mu\, d(p,s)$$
$$[P^\mu, d(p,s)^\dagger] = p^\mu\, d(p,s)^\dagger$$

$b(p,s)$ / $d(p,s)$ <u>vernichtet</u> ein Teilchen / Antiteilchen mit Impuls p^μ und Spin s

$b(p,s)^\dagger$ / $d(p,s)^\dagger$ <u>erzeugt</u> ein Teilchen / Antiteilchen mit Impuls p^μ und Spin s

Wieso <u>Antiteilchen</u>?

$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ ist ein erhaltener Strom $\rightarrow$ $j^\mu := q\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

$$Q = \int d^3x\; :j^0(x): = q \int d^3x\; :\psi^\dagger(x)\,\psi(x):$$
$$\overset{\text{ÜE}}{=} q \sum_s \int [dn(p,s) - d\bar{n}(p,s)]$$

$$\Rightarrow \quad [Q, b(p,s)] = -q\, b(p,s)$$

$$[Q, b(p,s)^\dagger] = q\, b(p,s)^\dagger$$

$$[Q, d(p,s)] = q\, d(p,s)$$

$$[Q, d(p,s)^\dagger] = -q\, d(p,s)^\dagger$$

d.h. $\begin{array}{l} b(p,s)^\dagger \\ d(p,s)^\dagger \end{array}$ erzeugt einen Zustand mit Ladung $\begin{array}{r} q \\ -q \end{array}$

$N := \sum_s \int dn(p,s)$ „misst" die Anzahl der Teilchen

$\bar{N} := \sum_s \int dn(p,s)$ –〃– –〃– –〃– –〃– Antiteilchen

$$Q = q\,(N - \bar{N})$$

<u>Konstruktion des Fockraums:</u>

<u>Vakuumzustand</u> $|0\rangle$ charakterisiert durch

$$b(p,s)\,|0\rangle = d(p,s)\,|0\rangle = 0 \quad \forall\, \vec{p}, s$$

<u>Ein</u> – $\dfrac{\underline{\text{Teilchen}}}{\underline{\text{Antiteilchen}}}$ – <u>Zustände</u>:

$b^\dagger(p,s)\,|0\rangle =: |p,s\rangle$, $\quad P^\mu\,|p,s\rangle = p^\mu\,|p,s\rangle$

$Q\,|p,s\rangle = q\,|p,s\rangle$ Energie-Impuls-Eigenzust. eines <u>Teilchens</u>

$$d^\dagger(p,s)\,|0\rangle =: \overline{|p,s\rangle}\ , \quad P^\mu\,\overline{|p,s\rangle} = p^\mu\,\overline{|p,s\rangle}$$

$$Q\,\overline{|p,s\rangle} = -q\,\overline{|p,s\rangle}$$

Energie-Impuls-Eigenzust. eines <u>Antiteilchens</u>

allg. Form eines normierbaren Zustands mit <u>einem</u> Teilchen:

$$|f\rangle = \sum_s \int d\mu(p)\, \underbrace{f(p,s)}_{\text{Wellenfunktion im Impulsraum}}\, |p,s\rangle \quad , \quad N|f\rangle = |f\rangle,\ \overline{N}|f\rangle = 0$$

$$Q|f\rangle = q|f\rangle$$

$$\langle f|f\rangle = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_s \int d\mu(p)\, |f(p,s)|^2 = 1$$

allg. Form eines normierbaren Zustands mit <u>einem</u> Antiteilchen:

$$|\overline{f}\rangle = \sum_s \int d\mu(p)\, \overline{f}(p,s)\, \overline{|p,s\rangle}; \quad N|\overline{f}\rangle = 0, \quad \overline{N}|\overline{f}\rangle = |\overline{f}\rangle$$

$$Q|\overline{f}\rangle = -q\,|\overline{f}\rangle$$

Zustände mit <u>zwei</u> Teilchen / Antiteilchen

$$|p_1,s_1;p_2,s_2\rangle = b^\dagger(p_1,s_1)\, b^\dagger(p_2,s_2)\,|0\rangle$$

$$= -\,b^\dagger(p_2,s_2)\, b^\dagger(p_1,s_1)\,|0\rangle$$

$$= -\,|p_2,s_2;p_1,s_1\rangle$$

Pauli-Prinzip!

zwei identische Fermionen können nicht im selben Einteilchenzustand sitzen

D6

$$P^\mu \, |p_1, s_1 ; p_2, s_2 \rangle = (p_1 + p_2)^\mu \, |p_1, s_1 ; p_2, s_2 \rangle$$

$$N \, |p_1, s_1 ; p_2, s_2 \rangle = 2 \, |p_1, s_1 ; p_2, s_2 \rangle$$

$$\overline{N} \quad -\|- \quad = 0$$

$$Q \quad -\|- \quad = 2q \quad -\|-$$

d.h. $|p_1, s_1 ; p_2, s_2 \rangle$ ist ein Impuls-Eigenzustand mit <u>zwei</u> Teilchen

allg. Form eines normierbaren Zweiteilchenzustands:

$$|f^{(2)}\rangle = \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} \int d\mu(p_1) \, d\mu(p_2) \; f^{(2)}(p_1, s_1 ; p_2, s_2) \, |p_1, s_1 ; p_2, s_2 \rangle$$

Zweiteilchenwellenfunktion ist <u>antisymmetrisch</u> unter Vertauschung $(p_1, s_1) \leftrightarrow (p_2, s_2)$

<u>analog</u> für Zustände mit zwei Antiteilchen

<u>Zustände mit einem Teilchen und einem Antiteilchen:</u>

$$b^\dagger(p_1, s_1) \, d^\dagger(p_2, s_2) \, |0\rangle$$

<u>usw.</u>

D7

Drehimpuls

$$\vec{J} = \int d^3x \; : \psi^\dagger \{ \underbrace{\vec{x} \times (-i \vec{\nabla})}_{\text{Bahndrehimpuls-}} + \underbrace{\frac{1}{2} \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}}^{\vec{\Sigma}}}_{\text{Spin-}} \} \psi :$$

Anteil

Normalordnung $\Rightarrow \quad \vec{J}\,|0\rangle = 0$

$$\vec{J}\, \underbrace{b^\dagger(\vec{k}, r)\,|0\rangle}_{|k, r\rangle} = [\vec{J}, b^\dagger(\vec{k}, r)]\,|0\rangle$$

$\vec{J}$ enthält Terme $\sim b^\dagger b$, $d^\dagger d$, $b^\dagger d^\dagger$, db

$\rightarrow$ zu $[\vec{J}, b^\dagger]\,|0\rangle$ liefern nur die $b^\dagger b$-Terme einen nichtverschwindenden Beitrag

$$\Rightarrow \quad \vec{J}\, b^\dagger(\vec{k}, r)\,|0\rangle =$$

$$= \sum_s \int d^3x \int d\mu(p)\, e^{ipx}\, u^\dagger(\vec{p}, s)\, [\vec{x} \times \frac{1}{i} \vec{\nabla} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma}]\, u(\vec{k}, r)\, e^{-ikx}\, b^\dagger(\vec{p}, s)\,|0\rangle$$

Drehimpuls eines ruhenden Teilchens $\equiv$ Spin $\rightarrow \vec{k} = 0$:

$$\vec{J}\, b^\dagger(\vec{0}, r)\,|0\rangle = \frac{1}{2m} \sum_s u^\dagger(\vec{0}, s)\, \frac{1}{2} \vec{\Sigma}\, u(\vec{0}, r)\, b^\dagger(0, s)\,|0\rangle$$

$$= \sum_s \xi^\dagger(s)\, \frac{\vec{\sigma}}{2}\, \xi(r)\; b^\dagger(\vec{0}, s)\,|0\rangle$$

z.B. $\xi(\uparrow) := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xi(\downarrow) := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad J_z\, b^\dagger(\vec{o}, \uparrow)|0\rangle = \frac{1}{2}\, b^\dagger(\vec{o}, \uparrow)|0\rangle$$

$$J_z\, b^\dagger(\vec{o}, \downarrow)|0\rangle = -\frac{1}{2}\, b^\dagger(\vec{o}, \downarrow)|0\rangle$$

Spin $\frac{1}{2}$

Antiteilchen:

Wegen $:dd^\dagger: = -d^\dagger d$ anderes Vorzeichen

$$\vec{J}\, d^\dagger(\vec{o}, r)|0\rangle \overset{VE}{=} -\sum_s \eta^\dagger(s)\, \frac{\vec{\sigma}}{2}\, \eta(r)\, d^\dagger(\vec{o}, s)|0\rangle$$

$\eta(\uparrow) := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\eta(\downarrow) := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad J_z\, d^\dagger(\vec{o}, \uparrow)|0\rangle = \frac{1}{2}\, d^\dagger(\vec{o}, \uparrow)|0\rangle$$

$$J_z\, d^\dagger(\vec{o}, \downarrow)|0\rangle = -\frac{1}{2}\, d^\dagger(\vec{o}, \downarrow)|0\rangle$$