# 5. Spin $\frac{1}{2}$ Felder (Spinorfelder)

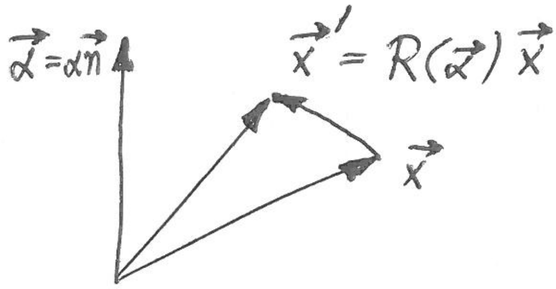


__zunächst:__

Spinorfelder in der nichtrelativistischen QM:

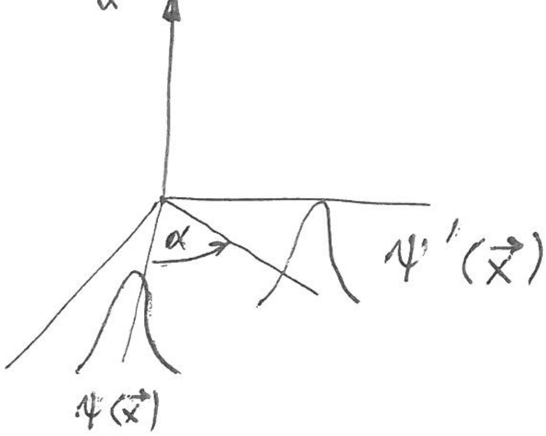
$$\psi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{x}) \\ \psi_2(\vec{x}) \end{bmatrix}$$ zweikomponentige Wellenfunktion

Verhalten bei einer räumlichen Drehung um den Winkel $\alpha$ mit Drehachse $\vec{n}$ $(\vec{n}^2 = 1)$




__Bem.:__

$$R(\vec{\alpha})_{ij} = \cos\alpha\, \delta_{ij} + (1-\cos\alpha)\, n_i n_j - \sin\alpha\, \varepsilon_{ijk} n_k$$




$R(\vec{\alpha})$ allg. Form einer $SO(3)$-Matrix ($SO(3) = \{R \mid R$ reelle $3\times 3$-Matrix mit $R^T R = \mathbb{1}$ und $\det R = 1\}$ = Gruppe)

$$\psi(\vec{x}) \rightarrow \psi'(\vec{x}) = e^{-i\vec{\alpha}\frac{\vec{\sigma}}{2}} \psi(R^{-1}(\vec{\alpha})\vec{x})$$

$$= e^{-i\vec{\alpha}\frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{-i\vec{\alpha}\vec{L}} \psi(\vec{x})$$

mit $\vec{L} = \vec{x} \times \frac{1}{i}\vec{\nabla}$ , $\vec{\sigma}$ = Pauli-Matrizen

$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2}$ <u>Gesamtdrehimpuls</u>

$U(\vec{\alpha}) := e^{-i\vec{\alpha}\frac{\vec{\sigma}}{2}}$ allg. Form einer $SU(2)$-Matrix

$SU(2) = \{ U \mid U$ komplexe $2\times 2$-Matrix mit $U^\dagger U = \mathbb{1}$ und $\det U = 1 \}$ (Gruppe)

<u>Bem.:</u> die Vektoren des zweidim. Raumes, auf die die $U \in SU(2)$ wirken nennt man <u>Spinoren</u>

<u>Bem.:</u> $\left[ \frac{\sigma_k}{2}, \frac{\sigma_l}{2} \right] = i\varepsilon_{klm} \frac{\sigma_m}{2}$

„Drehimpuls" – V. R.

reelle LK der $\sigma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ erzeugen <u>Liealgebra</u> $su(2)$ der $SU(2)$

Bem.: $U(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}\,\mathbb{1}_2 - i\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$

Zusammenhang zwischen $SO(3)$ und $SU(2)$:

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ 2\times 2\text{-Matrix}}}{X} = \vec{x}\cdot\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{bmatrix} \quad \text{hermit. spurlos}$$

$$X^\dagger = X \,, \quad \mathrm{Sp}\, X = 0$$

Umgekehrt lässt sich jede spurlose hermit. Matrix in der Form $X = \vec{x}\cdot\vec{\sigma}$ mit einem geeigneten reellen $\vec{x}$ schreiben. $\vec{x}$ lässt sich aus $X$ mittels

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\, X\vec{\sigma}$$

zurückgewinnen.

Es gilt weiters:

$$X^2 = \vec{x}^{\,2}\,\mathbb{1} \,, \quad \det X = -\vec{x}^{\,2}$$

$U \in SU(2)$

$X' = U X U^\dagger$ ist wieder hermit. und spurfrei

Durch die Abb. $X \to U X U^\dagger = X'$
wird eine lineare Transformation $\vec{x} \to R\vec{x} = \vec{x}'$
definiert

$$\vec{x} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} X \vec{\sigma} \quad \longrightarrow \quad \vec{x}' = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} U X U^\dagger \vec{\sigma} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} X' \vec{\sigma}$$

$$\vec{x}'^2 \mathbb{1} = X'^2 = U X U^\dagger U X U^\dagger = U X^2 U^\dagger = \vec{x}^2 \mathbb{1}$$

orthogonal sein muss.

$$x_i' = R_{ij} x_j = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} U X U^\dagger \sigma_i = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} U \sigma_j U^\dagger \sigma_i \; x_j$$

$$\Rightarrow \quad R_{ij} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \sigma_i U \sigma_j U^\dagger$$

<u>Bem.:</u> Das dem $SU(2)$ – Element $U(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}$
zugeordnete $SO(3)$ – Element ist gerade
das oben definierte $R(\vec{\alpha})$

<u>Bem.</u>: Die Abb.

$$U \to R_U \quad , \; (R_U)_{ij} = \frac{1}{2} \, \mathrm{Sp}\, \sigma_i U \sigma_j U^\dagger$$
$$SU(2) \to SO(3)$$

ist surjektiv. Es handelt sich um einen sog. Gruppenhomomorphismus (d. h. eine Abb., die die Gruppenmultiplikation respektiert)

Die Abb. ist allerdings <u>nicht</u> injektiv, denn zu jedem $R(\vec{\alpha}) \in SO(3)$ $\exists!$ 2 Elemente aus $SU(2)$ mit $R_U = R(\vec{\alpha})$, nämlich $U = \pm U(\vec{\alpha})$

$$\{U(\vec{\alpha}), -U(\vec{\alpha})\} \leftrightarrow R(\vec{\alpha})$$

$$SU(2) \,/\, \underbrace{\{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\}}_{= \mathbb{Z}_2} \cong SO(3)$$

<u>Bem.</u>: $R$ geg. $\Rightarrow$ zugehörige $U$s :

$$U = \pm \frac{\mathbb{1} + R_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j}{2\sqrt{1 + \mathrm{Sp}\, R}}$$

## Verallgemeinerung:

$SO(3) \rightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ (eigentliche, orthochrone Lorentzgruppe) $\det L = +1,\ L^0{}_0 \geq 1$

$SU(2) \rightarrow SL(2,\mathbb{C})$

$\underset{\uparrow\,\text{linear}}{\overset{\text{speziell}\,\downarrow}{S}}L(2,\mathbb{C})$ = Gruppe der komplexen $2\times 2$-Matrizen mit Determinante $=+1$

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \simeq SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \quad (a,b,c,d \in \mathbb{C})$

$\det A = ad - bc = 1$ zwei reelle Bedingungen

$\Rightarrow 8-2=6$ reelle Parameter zur Festlegung eines Elements von $SL(2,\mathbb{C}) \triangleq$ 6 reellen Parametern von $\mathcal{L}_+^\uparrow$

$\sigma^0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\sigma^1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\sigma^2 := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma^3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

reeller 4-Vektor $x_\mu$ $\rightarrow$ hermit. Matrix $x_\mu \sigma^\mu =$
$=: X$

$$X = x_\mu \sigma^\mu = \begin{bmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & x_0 - x_3 \end{bmatrix}$$

$A \in SL(2, \mathbb{C})$

$X \rightarrow X' = A X A^\dagger$ wieder hermit.

$X' = x_\mu' \sigma^\mu$

$\det X' = \det X = x_\mu' x^{\mu\prime} = x_\mu x^\mu$

d. h. $x$ und $x'$ sind durch eine

Lorentztransformation verbunden

Def.: $\bar{\sigma}^\mu := (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$

$x^\mu = \frac{1}{2}\, Sp\, X \bar{\sigma}^\mu$ , denn

$$\frac{1}{2}\, Sp\, x_\nu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = \frac{1}{2}\, x_\nu \underbrace{Sp\, \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu}_{2 g^{\mu\nu}} = x^\mu$$

$$\Rightarrow \quad L^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\, Sp\, \bar{\sigma}^\mu A\, \sigma_\nu A^\dagger$$

Wieder führen $\pm A \in SL(2, \mathbb{C})$ auf das gleiche $L$ (analog zu $\pm U \to R_U$)

$L^0{}_0 = \frac{1}{2}\, Sp\, A A^\dagger > 0 \quad \Rightarrow \quad L \in \mathcal{L}^\uparrow$

Bem.: Man kann auch zeigen, dass $\det L = +1$ für das oben erhaltene $L \quad \Rightarrow \quad L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$

<u>Bem.:</u> Jedes Element aus $SL(2,\mathbb{C})$ lässt sich in der Form

$$e^{-i(\vec{\alpha}-i\vec{u})\frac{\vec{\sigma}}{2}} \qquad \vec{\alpha},\vec{u}\in\mathbb{R}^3$$

schreiben. Reine Geschwindigkeitstransformationen haben die Form

$$e^{-\vec{u}\frac{\vec{\sigma}}{2}} = \cosh\frac{u}{2} - \vec{n}\vec{\sigma}\sinh\frac{u}{2}$$

$$\vec{u} = u\vec{n} \qquad (\vec{n}^2=1)$$

<u>Bsp.:</u>

$$e^{-u\frac{\sigma^1}{2}} = \cosh\frac{u}{2} - \sigma^1\sinh\frac{u}{2}$$

$\rightarrow$ dazugehöriges $L\in\mathcal{L}_+^\uparrow$

$$L^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \in SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow A, A^*, (A^T)^{-1}, (A^\dagger)^{-1}$ sind Darstellungen von $SL(2,\mathbb{C})$

$A$ und $A^*$ (bzw. $(A^T)^{-1}$ und $(A^\dagger)^{-1}$) sind nicht äquivalent, d.h. $\nexists$ invertierbare Matrix $S$ mit $A^* = SAS^{-1}$. Dagegen sind $A$ und $(A^T)^{-1}$ bzw. $A^*$ und $(A^\dagger)^{-1}$ äquivalent.

Bem.: $U \in SU(2) \Rightarrow U^*$ äquivalent zu $U$, denn $\sigma^2 \vec{\sigma}\, \sigma^2 = -\vec{\sigma}^* = -\vec{\sigma}^T \qquad (\sigma^2\sigma^2 = \mathbb{1})$

$$\sigma^2 \underbrace{e^{-i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}}_{U \in SU(2)} \sigma^2 = e^{i\vec{\alpha}\frac{\vec{\sigma}^*}{2}} = U^*$$

$$= e^{i\vec{\alpha}\frac{\vec{\sigma}^T}{2}} = (U^T)^{-1}$$

d.h. für reine Drehungen sind die oben angegebenen Darstellungen alle äquivalent, ja es ist sogar $(U^\dagger)^{-1} = U, \quad (U^T)^{-1} = U^*$

Für allgemeine Elemente aus $SL(2,\mathbb{C})$ mit $\vec{u} \neq 0$ ist das jedoch nicht mehr der Fall:

$$A = e^{-i(\vec{\alpha} - i\vec{u})\frac{\vec{\sigma}}{2}}$$

$$\sigma^2 A \sigma^2 = \underbrace{e^{i(\vec{\alpha} - i\vec{u})\frac{\vec{\sigma}^*}{2}}}_{\neq A^* \text{ für } \vec{u} \neq 0} = \underbrace{e^{i(\vec{\alpha} - i\vec{u})\frac{\vec{\sigma}^T}{2}}}_{= (A^T)^{-1}}$$

<u>Spinoralgebra</u>

$A \in SL(2,\mathbb{C})$ wirkt auf zweidim. (komplexe) Vektoren = Spinoren $\chi$

$$\chi' = A\chi \quad \Big|^* \quad \longrightarrow \quad \chi'^* = A^* \chi^*$$

$$(A^T)^{-1} = \varepsilon A \varepsilon^{-1} \quad \text{mit } \varepsilon = i\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon^T = -\varepsilon$$

$$\varepsilon\chi' = \underbrace{\varepsilon A \varepsilon^{-1}}_{(A^T)^{-1}} \varepsilon\chi \quad \xrightarrow{*} \quad \varepsilon\chi'^* = \underbrace{\varepsilon A^* \varepsilon^{-1}}_{(A^\dagger)^{-1}} \varepsilon\chi^*$$

Bildung von (Lorentz-) Invarianten

geg. Spinoren $\varphi, \chi$

$(\varepsilon\varphi')^T = (\varepsilon\varphi)^T A^{-1}$

$\Rightarrow$ $(\varepsilon\varphi)^T \chi$ ist ein Skalar, denn

$(\varepsilon\varphi')^T \chi' = (\varepsilon\varphi)^T \chi$

analog für komplex konj. Spinoren:

$[(\varepsilon\varphi)^T \chi]^\dagger = \chi^\dagger \varepsilon \varphi^*$ ist ebenfalls ein Skalar

Beh.: $(\varepsilon\varphi)^T \sigma^\mu \varepsilon \chi^*$ ist ein 4-Vektor,

d.h. $(\varepsilon\varphi')^T \sigma^\mu \varepsilon \chi'^* = L^\mu{}_\nu (\varepsilon\varphi)^T \sigma^\nu \varepsilon \chi^*$

Bew.: $(\varepsilon\varphi')^T \sigma^\mu \varepsilon \chi'^* =$

$$= (\varepsilon\varphi)^T A^{-1} \sigma^\mu \underbrace{\varepsilon A^* \varepsilon^{-1}}_{= (A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger} \chi^*$$

Wir wissen bereits:

$$x_\mu A \sigma^\mu A^\dagger = x_\nu' \sigma^\nu = L_\nu{}^\mu x_\mu \sigma^\nu$$

$$x_\mu \text{ beliebig} \Rightarrow \quad A \sigma^\mu A^\dagger = \sigma^\nu L_\nu{}^\mu$$

$$\begin{array}{l} A \to A^{-1} \\ L \to L^{-1} \end{array} \Rightarrow \quad A^{-1} \sigma^\mu (A^{-1})^\dagger = \sigma^\nu (L^{-1})_\nu{}^\mu$$

$$L^T g L = g \quad \Rightarrow \quad \underbrace{g^{-1} L^T g}_{= L^{-1}} L = \mathbb{1}$$

$$g^{\mu\rho} (L^T)_\rho{}^\sigma g_{\sigma\nu} = (L^{-1})^\mu{}_\nu$$

$$g^{\mu\rho} L^\sigma{}_\rho g_{\sigma\nu} = (L^{-1})^\mu{}_\nu$$

$$L_\nu{}^\mu = (L^{-1})^\mu{}_\nu \quad \overset{L \leftrightarrow L^{-1}}{\Longrightarrow} \quad (L^{-1})_\nu{}^\mu = L^\mu{}_\nu$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} \sigma^\mu (A^{-1})^\dagger = L^\mu{}_\nu \sigma^\nu$$

$$\Rightarrow \quad (\varepsilon \varphi')^T \sigma^\mu \varepsilon \chi'^* = L^\mu{}_\nu (\varepsilon \varphi)^T \sigma^\nu \varepsilon \chi^*$$

✓

Einen weiteren 4-Vektor kann man so erhalten:

$$[ (\varepsilon\varphi)^T \sigma^\mu \varepsilon \chi^* ]^* =$$

$$(\varepsilon\varphi)^\dagger \sigma^{\mu *} \varepsilon \chi =$$

$$= \varphi^\dagger \underbrace{\varepsilon^T \sigma^{\mu *} \varepsilon}_{= \bar{\sigma}^\mu \text{ ÜE}} \chi = \varphi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi$$

$$\varphi, \chi \to \varphi(x), \chi(x) \quad (\text{Spinor\underline{felder}})$$

$$\Rightarrow \quad (\varepsilon\varphi)^T \sigma^\mu \varepsilon \partial_\mu \chi^* \quad \text{und}$$

$$\varphi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$$

sind <u>Skalare</u> $\to$ Kandidaten für Terme in der Lagrangedichte für ein Spinorfeld

<u>Bem.:</u> $(\varepsilon\varphi')^T = (\varepsilon A\varphi)^T = (\varepsilon\varphi)^T A^{-1}$

$$\Rightarrow \sigma^\mu \varepsilon \partial_\mu \chi'^* = \sigma^\mu \varepsilon \partial_\mu A^* \chi^* =$$

$$= A\, \sigma^\mu \varepsilon \partial_\mu \chi^*$$

d.h. $\sigma^\mu \varepsilon \partial_\mu \chi^*$ hat unter $SL(2,\mathbb{C})$

das gleiche Transformationsverhalten
wie $\chi$.

Analog: Da $\varphi'^\dagger = (A\varphi)^\dagger = \varphi^\dagger A^\dagger$, muss

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi' = \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu A \chi = (A^\dagger)^{-1} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$$

sein, d. h. $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$ transformiert
sich unter $SL(2,\mathbb{C})$ genauso wie $\varepsilon \chi^*$

$\Rightarrow$ kann daher folgende Feldgleichung
für ein (Weyl-) Spinorfeld angeben:

$$i \sigma^\mu \partial_\mu \varepsilon \chi^* - m \chi = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m \varepsilon \chi^* = 0$$

Majoranagleichung (für $m=0$: Weylgleichung)

<u>Beobachtung</u>: Majoranagleichung $\Rightarrow (\Box + m^2)\chi(x) = 0$,

denn

$$i\sigma^\mu \partial_\mu (i\bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi) - m^2 \chi = 0$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)}_{= 2 g^{\mu\nu}} \partial_\mu \partial_\nu \chi + m^2 \chi = 0$$

ÜE

$\Rightarrow (\Box + m^2)\chi = 0 \Rightarrow$ Energie-Impuls-Bez. für Teilchen mit Masse $m$

<u>weitere Beobachtung</u>: Majoranagleichung <u>nicht</u> invariant unter $U(1)$-Transf. $\chi \to e^{i\alpha}\chi \Rightarrow$ Majoranagl. kann nur <u>neutrales</u> Feld beschreiben. (Mögliche Beschreibung eines massiven Neutrinos)

Geladene Teilchen (wie etwa $e^-$) können daher durch <u>einen</u> Weylspinor allein <u>nicht</u> beschrieben werden. Außerdem $\cancel{P}$!

$\Rightarrow$ zur Beschreibung eines geladenen Spin $\frac{1}{2}$ Teilchens mit P-invarianter Ww benötigt man <u>zwei</u> Weylspinoren $\varphi$, $\chi$

$\Rightarrow$ <u>Diracgleichung</u>

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \varepsilon\varphi^* - m\chi = 0$$

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m\varepsilon\varphi^* = 0$$

inv. unter $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$, $\chi \to e^{-i\alpha}\chi$

Üblicherweise fasst man die beiden Weyl-spinoren zu einem 4-Spinor (Diracspinor) zusammen:

$$\psi = \begin{bmatrix} \chi \\ \varepsilon\varphi^* \end{bmatrix}$$

$$i\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}}_{=:\gamma^\mu}\partial_\mu\underbrace{\begin{bmatrix} \chi \\ \varepsilon\varphi^* \end{bmatrix}}_{\psi} - m\begin{bmatrix} \chi \\ \varepsilon\varphi^* \end{bmatrix} = 0$$

$$(i\underbrace{\gamma^\mu \partial_\mu}_{=:\,\not\partial} - m)\,\psi(x) = 0$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma$-Matrizen in der „Weylbasis"

Antivertauschungsrelationen der $\gamma$-Matrizen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, g^{\mu\nu}\, \mathbb{1}_4 \qquad \text{UE}$$

Bem. 1) Oft bildet die Diracgl. in der vierkomponentigen Form zusammen mit den Anti-V.R. der $\gamma$-Matrizen den Ausgangspunkt der Diskussion

2) Man kann einen Basiswechsel $\psi = S\tilde{\psi}$ durchführen ($S$ invertierbar) Ändert die Anti-V.R. nicht.

# Wirkungsintegral für die Diracgleichung:

$$S_{Dirac} = \int d^4x \; [\; i\, (\varepsilon\varphi)^T \sigma^\mu \partial_\mu (\varepsilon\varphi^*) \; +$$
$$+\; i\, \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$$
$$-\, m\, (\varepsilon\varphi)^T \chi \;-\; m\, \chi^\dagger \varepsilon \varphi^* \;]$$

$$= \int d^4x \; \{\; i\, \overbrace{\underbrace{[\chi^\dagger, (\varepsilon\varphi)^T]}_{\psi^\dagger} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1\!\!1 \\ 1\!\!1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:\beta = \gamma^0}}^{=:\bar{\psi}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{bmatrix}}_{\gamma^\mu} \partial_\mu \underbrace{\begin{bmatrix} \chi \\ \varepsilon\varphi^* \end{bmatrix}}_{\psi}$$

$$-\, m\, \underbrace{[\chi^\dagger, (\varepsilon\varphi)^T]}_{\psi^\dagger} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1\!\!1 \\ 1\!\!1 & 0 \end{bmatrix}}_{\beta} \begin{bmatrix} \chi \\ \varepsilon\varphi^* \end{bmatrix} \;\}$$

$$= \int d^4x \;\; \bar{\psi}\, (\underbrace{i\gamma^\mu \partial_\mu}_{\not{\partial}} - m)\, \psi$$

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \beta = \psi^\dagger \gamma^0$$

Bem.: $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ ist ein erhaltener Strom (Kandidat für 4-Stromdichte)

$$\partial_\mu j^\mu = \bar{\psi}\underbrace{\gamma^\mu\partial_\mu\psi}_{-im\psi} + \underbrace{(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu}_{im\psi \text{ ÜE}}\psi = 0$$

Bem.: $\partial_\mu j^\mu = 0$ folgt aus der Invarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$ unter der (globalen) U(1) - (Eich-) Transf.

$\psi \to e^{i\alpha}\psi$ $\quad (\Rightarrow \bar{\psi} \to e^{-i\alpha}\bar{\psi})$ ÜE

# Transformationsverhalten eines Diracspinors unter $SL(2,\mathbb{C})$

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \chi(x) \\ \varepsilon\varphi^*(x) \end{bmatrix}$$

Transformationsverhalten von $\chi$ bzw. $\varepsilon\varphi^*$ kennen wir bereits (mit $A$ bzw. $(A^\dagger)^{-1}$)

$$A \in SL(2,\mathbb{C}) \rightarrow L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$$

$$x^{\mu'} = L^\mu{}_\nu \, x^\nu$$

$$\chi'(x') = A\,\chi(x) = A\,\chi(L^{-1}x')$$

$$\varepsilon\varphi'^*(x') = (A^\dagger)^{-1}\,\varepsilon\varphi^*(x) = (A^\dagger)^{-1}\,\varepsilon\varphi^*(L^{-1}x')$$

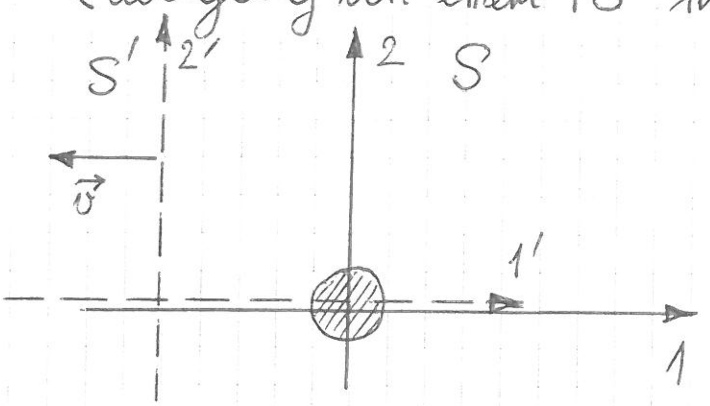
bzw.

$$\psi'(x') = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^\dagger)^{-1} \end{bmatrix}}_{S_L}\psi(x) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^\dagger)^{-1} \end{bmatrix}\psi(L^{-1}x')$$

$S_L$ reduzible Darst. von $SL(2,\mathbb{C})$

Passive Deutung der Lorentztransformation

(Übergang von einem IS in ein anderes)




$\psi(x)$ beschreibt das Feld in S

$\psi'(x') = \quad S_L \psi(L^{-1}x')$ beschreibt das gleiche Feld von S' aus gesehen

(= passive Interpretation)

Sieht etwa ein Beobachter in S ein Feld, das im wesentlichen um den Ursprung konzentriert ist und dort „ruht", so sieht der Beobachter in S' ein Feld, das sich mit der Geschwindigkeit v in

Richtung der positiven 1'-Achse bewegt.

Bei einer <u>aktiven</u> Interpretation bleibe ich in einem bestimmten Bezugssystem und stelle mir vor, dass sich das Feld mit Geschwindigkeit v in Richtung der positiven 1-Achse bewegt. Ich sehe jetzt natürlich das gleiche wie im ersten Fall der Beobachter in S'. Das Feld ist daher

$$\psi'(x) = S_L\, \psi(L^{-1}x),$$

wobei $\psi(x)$ das „ruhende" Feld ist (sog. „Lorentz-boost")

# Lösungen der freien Diracgleichung

Jede Spinorkomponente ist Lsg. von $(\Box + m^2)\psi_r(x) = 0$

$\Rightarrow$ Allg. Lsg. ist LK von Lsgn der Form

$$u(\vec{p})\, e^{-ipx} \quad \text{und} \quad v(\vec{p})\, e^{+ipx}$$

($u, v$ sind 4-Spinoren)

$$p^0 = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

a) $\psi(x) = u(\vec{p})\, e^{-i\vec{p}\vec{x}}$

$$\Rightarrow \quad (\not{p} - m)\, u(\vec{p}) = 0$$

Ermitteln zunächst die Lösung für $\vec{p} = 0$
(Lösung für $\vec{p} \neq 0$ durch Lorentztransf. zu erhalten)

$$m\,(\gamma^0 - \mathbb{1}_4)\, u(\vec{0}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{bmatrix} u(\vec{0}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(\vec{o}) = \sqrt{m} \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \end{bmatrix} \quad , \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$ bel. 2-dim. Vektor

Lösung für beliebiges $\vec{p}$ durch Anwendung eines Lorentz-„boost" auf $u(\vec{o})\, e^{-imx^0} \longrightarrow u(\vec{p})\, e^{-ipx} =$

$$= S\, u(\vec{o})\, e^{-im\,(L^{-1}x)^0}$$

$$S = \begin{bmatrix} e^{-\vec{u}\frac{\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\vec{u}\frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{bmatrix}$$ (für geeignet gewähltes $\vec{u}$) (Doppelbezeichnung!)

Betrachten zunächst den Spezialfall eines „boosts" in Richtung der 3-Achse (die Verallgemeinerung auf eine beliebige Raumrichtung wird sich dann als trivial erweisen):

$$S = \begin{bmatrix} e^{-u\frac{\sigma^3}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+u\frac{\sigma^3}{2}} \end{bmatrix}$$

wir haben:

$$L^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \bar{\sigma}^\mu A \sigma_\nu A^\dagger$$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} \cosh u & 0 & 0 & \sinh u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh u & 0 & 0 & \cosh u \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh u & 0 & 0 & -\sinh u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh u & 0 & 0 & \cosh u \end{bmatrix}$$

$$(L^{-1}x)^0 = \cosh u \; x^0 - \sinh u \; x^3$$

$$u(\vec{o})\, e^{-imx^0} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-u\frac{\sigma^3}{2}} & 0 \\ 0 & e^{u\frac{\sigma^3}{2}} \end{bmatrix} u(\vec{o})}_{u(p)} \, \underbrace{e^{-im(\cosh u\, x^0 - \sinh u\, x^3)}}_{e^{-ipx}}$$

$$p^0 = m \cosh u = \frac{m}{2}\left(e^u + e^{-u}\right)$$

$$p^1 = p^2 = 0$$

$$p^3 = m \sinh u = \frac{m}{2}\left(e^u - e^{-u}\right)$$

$$m e^{u} = p^0 + p^3$$

$$m e^{-u} = p^0 - p^3$$

$$u(\vec{p}) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{u}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{+\frac{u}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{+\frac{u}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{u}{2}} \end{bmatrix} \sqrt{m} \begin{bmatrix} \xi \\ \\ \xi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{p^0-p^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p^0+p^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{p^0+p^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{p^0-p^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \\ \xi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{p^\mu \sigma_\mu} & 0 \\ 0 & \sqrt{p^\mu \bar{\sigma}_\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{p.\sigma}\, \xi \\ \sqrt{p.\bar{\sigma}}\, \xi \end{bmatrix}$$

(in dieser Form ist auch die Verallgemeinerung auf beliebiges $\vec{p}$ offensichtlich)

Zusammenfassung: Zu einem vorgegebenen 3-Vektor $\vec{p}$ gibt es zwei l.u. Lsgn. der Form $u(\vec{p},s)\, e^{-ipx}$ mit

$$u(\vec{p},s) = \begin{bmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\ \xi(s) \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\ \xi(s) \end{bmatrix} \qquad (s=1,2)$$

mögliche Normierung der Basisvektoren: $\xi(r)^\dagger \xi(s) = \delta_{rs}$

(z.B. $\xi(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xi(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$)

$$\Rightarrow \quad \bar{u}(\vec{p},r)\, u(\vec{p},s) = 2m\,\delta_{rs}$$

b) $\psi(x) = v(\vec{p})\, e^{ipx}$

$$(\not{p}+m)\, v(\vec{p}) = 0$$

$$v(\vec{p},s) = \begin{bmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\ \eta(s) \\ -\sqrt{p\cdot\sigma}\ \eta(s) \end{bmatrix} \qquad (s=1,2)$$

Normierung: $\eta(r)^\dagger \eta(s) = \delta_{rs}$

$$\Rightarrow \quad \bar{v}(\vec{p},r)\, v(\vec{p},s) = -2m\,\delta_{rs}$$