

Pfadintegralquantisierung

T2: Vektoren in einem (i.A. ∞ -dim.) Hilbertraum \mathcal{H} :

$$|\psi\rangle, |\phi\rangle, |x\rangle, |p\rangle, \dots$$

Operatoren auf \mathcal{H} : (i.A. nicht miteinander kommutierende Größen!)

$$X, P; [X, P] = i\hbar \mathbb{I}$$

$$H = P^2/2m, U(t_f, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_f - t_i)}, \dots$$

alle diese Größen treten nur in Zwischenschritten von Rechnungen auf!

im Ergebnis relevant sind nur (komplexe) Amplituden:

$$\langle x_f | U(t_f, t_i) | x_i \rangle = \text{Amplitude das Teilchen zum}$$

Zeitpunkt t_f am Ort x_f anzutreffen, wenn es zum Zeitpunkt t_i am Ort x_i war

$$\langle f | S | i \rangle = S_{fi}$$

S-Matrixelement bei Streuexperimenten

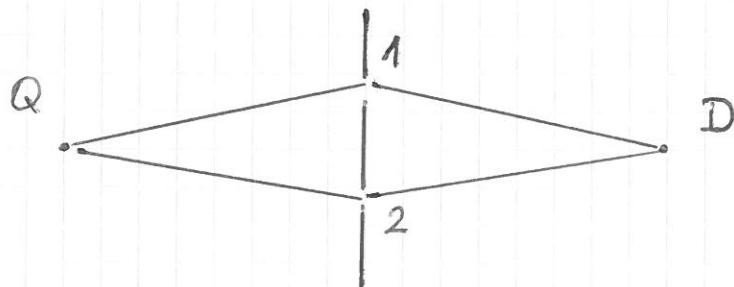
$$\langle \psi | A | \psi \rangle$$

Erwartungswert von A im Zustand $|\psi\rangle$

...

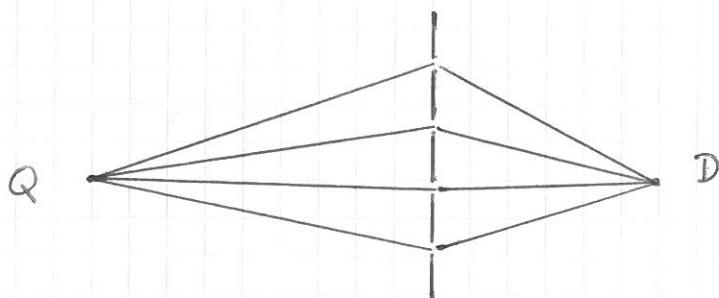
Pfadintegralmethode : Formulierung der QM, bei der ausschließlich c-Zahlen verwendet werden
 (c-Zahlen = kommutierende Größen) [bzw. sog.
 Grassmannvariable bei der Quantisierung von fermionischen Systemen]

Doppelopaltversuch:



$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

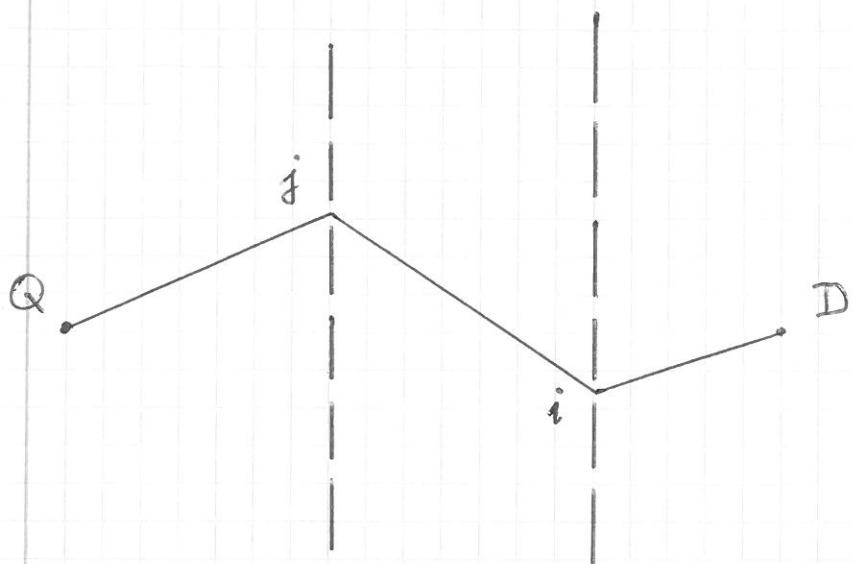
viele Spalte:



$$\phi = \sum_i \phi_i$$

P3

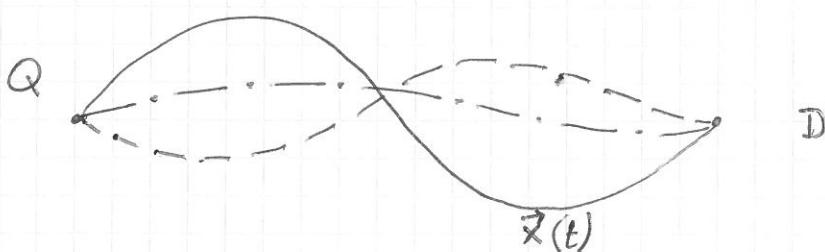
mehrere Schirme:



$$\phi = \sum_{i,j} \phi_{ij}$$

Grenzfall unendlich vieler Löcher und Schirme \equiv weder Löcher noch Schirme

$$\phi = \sum_{\text{Pfade } \vec{x}(t)} \phi(\vec{x}(t))$$



$$\phi = \sum_{\text{Pfade } \vec{x}(t)} e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{x}(t)]}$$

↑
Klassische Wirkung

F4

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int [dx(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$$

$x(t_i) = x_i$
 $x(t_f) = x_f$

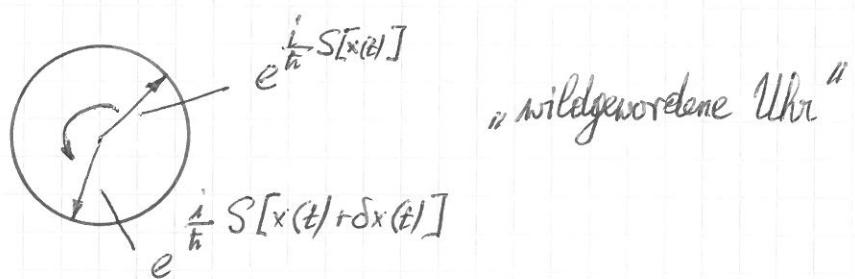
Pfadintegral

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t) \quad \underline{\text{klassische Wirkung}}$$

erklärt den Grenzfall der klassischen Mechanik

($S \gg \hbar$):

bei einer kleinen Änderung des Pfades ($x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t)$)
oszilliert $e^{\frac{i}{\hbar} S}$ wie wild und es kommt im Pfadintegral
zu destruktiver Interferenz

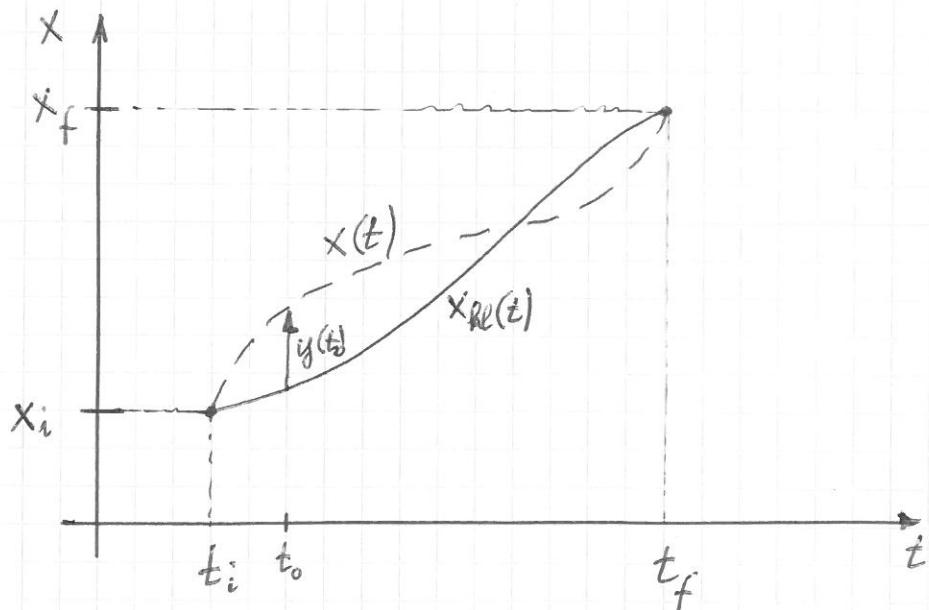


Ausnahme: $x(t)$ in der Nähe der klassischen Lösung

$x_{cl}(t)$, charakterisiert durch

$$\left. \frac{\delta S[x(t)]}{\delta x(t)} \right|_{x \neq x_{cl}(t)} = 0 \quad (\text{stationäre Phase!})$$

Klassische Bahn dominiert das Pfadintegral im Grenzfall
 $S \gg \hbar$!



$$x(t) = x_{RL}(t) + \underbrace{y(t)}_{\delta x(t)}, \quad y(t_i) = y(t_f) = 0$$

werden später sehen: $[dx(t)] = [dy(t)]$ (Maß translations-invariant)

$$S[x(t)] = S[x_{RL}(t) + y(t)] =$$

$$= S[x_{RL}(t)] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left. \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \right|_{x(t)=x_{RL}(t)} y(t)$$

$$+ \frac{1}{2!} \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{t_i}^{t_f} dt_2 \left. \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \right|_{x(t)=x_{RL}(t)} y(t_1) y(t_2) + \dots$$

$$\langle x_p, t_f | x_i, t_i \rangle =$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{\text{re}}]} \int [dy] e^{\frac{i}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{t_i}^{t_f} dt_2 \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \Big|_{x=x_{\text{re}}} y(t_1) y(t_2) + \dots}$$

führender Beitrag
 im Limes $\hbar \rightarrow 0$

$y(t_i) = y(t_f) = 0$
 im Limes $\hbar \rightarrow 0$ kommen wesentliche Beiträge
 nur von Pfaden mit $y(t) \equiv \delta x(t) = x(t) - x_{\text{re}}(t) \sim \sqrt{\hbar}$

$x_{\text{re}}(t)$ ist Lsg. der klass. Bewegungsgl. mit RB $x_{\text{re}}(t_i) = x_i$,

$$x_{\text{re}}(t_f) = x_f$$

→ quasiklassische Näherung:

$$\langle x_p, t_f | x_i, t_i \rangle \approx e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{\text{re}}]} F(t_f, t_i, \dots)$$

Bemerkung: F in wesentlichen durch die Normierungs-

bedingung $\lim_{t_f \rightarrow t_i} \langle x_p, t_f | x_i, t_i \rangle = \delta(x_f - x_i)$

bestimmt

Spezialfall: freies Teilchen

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m \dot{x}(t)^2}{2} \Rightarrow x_{\text{re}}(t) = \underbrace{\frac{x_p - x_i}{t_f - t_i} t}_{v} + \underbrace{\frac{x_i t_f - x_f t_i}{t_f - t_i}}_{\frac{1}{2} v^2 (t_f - t_i)}$$

$$\dot{x}_i(t) = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow S[x_{\text{re}}] = \frac{m}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i}$$

$$\Rightarrow \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = e^{\frac{i m}{2 \hbar} \frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i}} F(t_f - t_i)$$

↑
zeitl. Translationsinv.

F kann durch Normierungsbedingung

$$\lim_{t_f \rightarrow t_i} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \delta(x_f - x_i)$$

bestimmt werden:

verwende $\frac{1}{\sqrt{i \pi \varepsilon}} e^{\frac{i(x^2 + i0)}{\varepsilon}}$ $\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \delta(x)$

$$\rightarrow \varepsilon = \frac{2\hbar (t_f - t_i)}{m} \Rightarrow F(t_f - t_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)}}$$

$$\Rightarrow \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)}} e^{\frac{i m}{2 \hbar} \frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i}}$$

Berechnung dieses Ausdrucks auf „konventionelle“ Art:

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H (t_f - t_i)} | x_i \rangle$$

$$|x, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H t} |x\rangle \quad \text{ist ein Eigenvektor}$$

!!

des Heisenbergoperators $X(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \underbrace{X(0)}_{= X} e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$
zum Eigenwert x , denn $= X$ (im Schrödingerbild)

$$X(t) |x, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H t} X(0) \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H t} e^{\frac{i}{\hbar} H t}}_1 |x\rangle \\ = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \underbrace{X|x\rangle}_{x|x\rangle} = x e^{\frac{i}{\hbar} H t} |x\rangle = x |x, t\rangle \checkmark$$

$$H = \frac{P^2}{2m} \quad (\text{freies Teilchen})$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp |p\rangle \langle p|$$

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} (t_f - t_i)} | x_i \rangle \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \underbrace{\langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} (t_f - t_i)} | p \rangle \langle p | x_i \rangle}_{\frac{e^{-ipx_i/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} (t_f - t_i)} e^{ip(x_f - x_i)/\hbar} \quad \text{Fresnel-Integral !*)}$$

$$= \left(\frac{\pi \hbar 2m}{i (t_f - t_i)} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{(x_f - x_i)^2 \hbar 2m}{4 \hbar i (t_f - t_i)} \right)$$

$$\times \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} e^{\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar (t_f - t_i)}} \checkmark$$

*) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iax^2}$ ist zu verstehen als $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i(a-i\delta)x^2}$

Bemerkung: es wurde die Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} a > 0$$

verwendet, wobei $\sqrt{a} := \sqrt{|a|} e^{i\theta/2}$ mit $a = |a|e^{i\theta}$,

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$K(x_f, t_f; x_i, t_i) := \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ wird auch als Ausbreitungskern (oder Propagator) bezeichnet.

Nun haben soeben den freien Ausbreitungskern $K_0(x_f, t_f; x_i, t_i)$ explizit berechnet.

Wichtige Eigenschaften des Ausbreitungskerns:

1) Normierung: $\lim_{t_f \rightarrow t_i} K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \delta(x_f - x_i)$

2) Ist die Wellenfunktion $\psi(x_i, t_i)$ zum Zeitpunkt t_i gegeben (Anfangsbed.), so die Wellenfunktion zum Zeitpunkt t_f (Schrödingerbild):

$$\psi(x, t_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i K(x, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i)$$

$$|\psi(t_f)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f - t_i)} |\psi(t_i)\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle x | \psi(t_f) \rangle}_{\equiv \psi(x, t_f)} = \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f - t_i)} \underbrace{|\psi(t_i)\rangle}_{\equiv \psi(x_i, t_i)}$$

↑

$$1 = \int dx_i |x_i\rangle \langle x_i|$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \underbrace{\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f - t_i)} |x_i\rangle}_{K(x, t_f; x_i, t_i)} \underbrace{\langle x_i | \psi(t_i)\rangle}_{\equiv \psi(x_i, t_i)}$$

3) $K(x, t; x_i, t_i)$ erfüllt die Schrödingergl.

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(x, p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \right] K(x, t; x_i, t_i) = 0$$

(H in der x-Darst.)

4) Faltungseigenschaft

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ K(x_f, t_f; x, t) K(x, t; x_i, t_i)$$

$$t_i < t < t_f$$

↑
sel.

$$\text{folgt aus } U(t_f, t_i) = U(t_f, t) U(t, t_i)$$

Klar, denn

$$\begin{aligned}\psi(x, t_f) &= \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_f - t_i)} | \psi \rangle = \\ &= \int dx_i \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_f - t_i)} | x_i \rangle \underbrace{\langle x_i | \psi \rangle}_{\psi(x_i)}\end{aligned}$$

5) Entwicklung nach Energieigenzuständen

$$\begin{aligned}H|n\rangle &= E_n|n\rangle, \quad \langle x|n\rangle = \phi_n(x) \quad 1 = \sum_n |n\rangle \langle n| \\ \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_f - t_i)} | x_i \rangle = \\ &= \sum_n \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_f - t_i)} | n \rangle \langle n | x_i \rangle \\ &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_f - t_i)} \underbrace{\langle x_f | n \rangle}_{\phi_n(x_f)} \underbrace{\langle n | x_i \rangle}_{\phi_n(x_i)^*}\end{aligned}$$

6) Potardierter (oder kausaler) Propagator definiert durch

$$K_r(x_f, t_f; x_i, t_i) := \Theta(t_f - t_i) K(x_f, t_f; x_i, t_i)$$

erfüllt die Gleichung

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(x, p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \right) K_r(x, t; x_i, t_i) = i\hbar \delta(t - t_i) \delta(x - x_i)$$

d.h. K_r ist eine Greenfunktion der Schrödingergleichung

Bemerkung: Direkte Berechnung des retardierten Propagators für das freie Teilchen (eindim. Bewegung)

setze $x_i = 0, t_i = 0$ und suche Lösung der Gl.

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) G_r(x, t) = i\hbar \delta(t) \delta(x)$$

mit $G_r(x, t) = 0$ für $t < 0$

Fourierdarst.:

$$G_r(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{ikx} \tilde{G}_r(\omega, k)$$

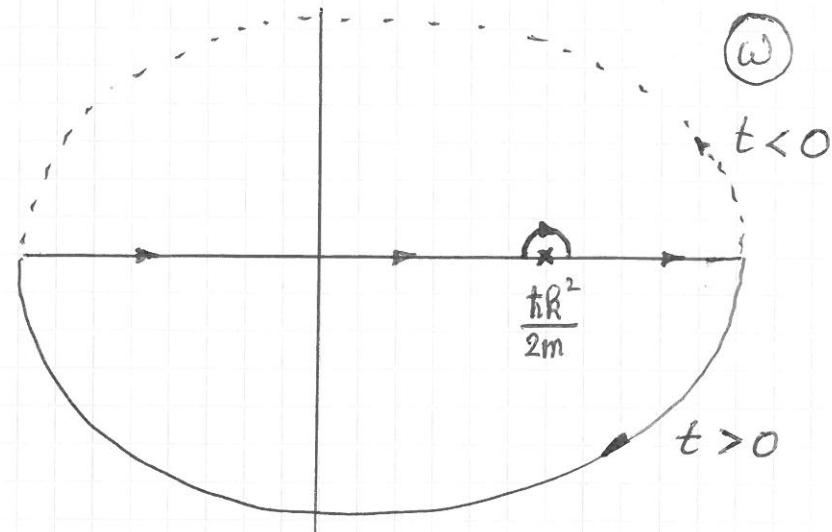
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{ikx} \left(\hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \tilde{G}_r(\omega, k) = \\ = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \tilde{G}_r(\omega, k) = \frac{i}{\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

$$G_r(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{ikx} \frac{i}{\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i e^{-i\omega t}}{\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

Durchführung der ω -Integration mit Hilfe
des Residuensatzes unter Berücksichtigung der
Randbedingung. $G_r(x,t) = 0$ für $t < 0$:



$$e^{-i(\text{Re}\omega + i\text{Im}\omega)t} = e^{-i\text{Re}\omega t} e^{i\text{Im}\omega t} \rightarrow \begin{array}{l} \text{für } t > 0 \text{ unten schließen} \\ \text{für } t < 0 \text{ oben schließen} \end{array}$$

↓
exp.-Dämpfung

↓
kein Beitrag des Halbkreises für $R \rightarrow \infty$

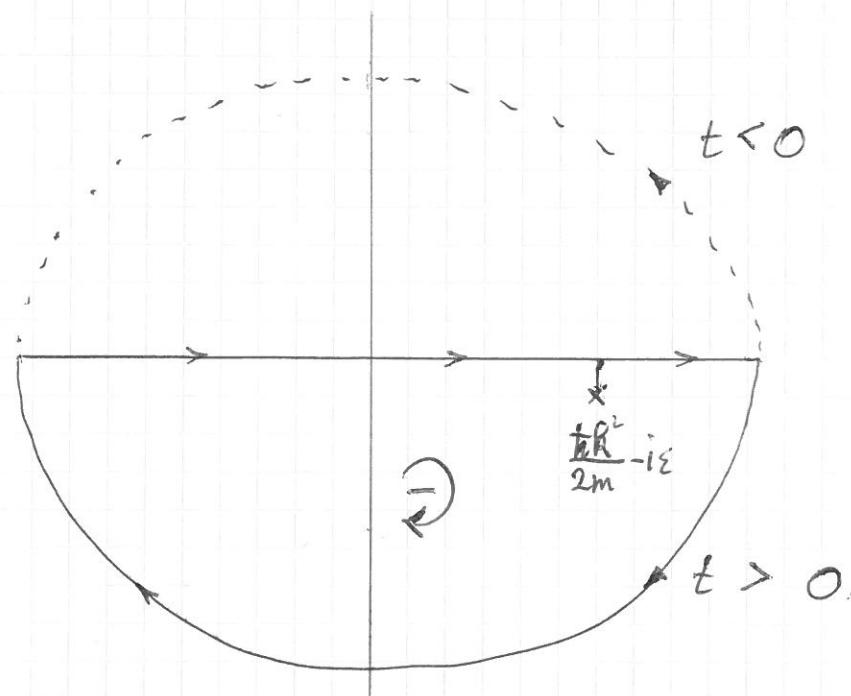
wegen RB muss Pol bei $\frac{tR^2}{2m}$ oben umgangen werden

→ Integral verschwindet für $t < 0$ ✓

andere Möglichkeit: inf. Verschiebung des Pols

$$\frac{tR^2}{2m} \rightarrow \frac{tR^2}{2m} - i\varepsilon, \varepsilon > 0$$

und Integration über reelle Achse



$$G_r(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \int \frac{dw}{2\pi} \frac{i e^{-iwt}}{\omega - (\frac{\hbar k^2}{2m} - i\varepsilon)}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} (-2\pi i) \frac{i}{2\pi} e^{-i(\frac{\hbar k^2}{2m} - i\varepsilon)t} \Theta(t)$$

↑
Integrationskurve wird für $t > 0$
im math. negativen Sinn durchlaufen

kein Beitrag
f. $t < 0$

$$= \underbrace{\int \frac{dk}{2\pi} e^{-i(\frac{\hbar k^2}{2m} t)} e^{ikx}}_{\text{haben wir bereits}} \Theta(t)$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{1/2} e^{\frac{imx^2}{2\hbar t}} \Theta(t)$$

Bem.: $K_r(x_f, t_f; x_i, t_i) = G_r(x_f - x_i, t_f - t_i)$
(Translationsinv.)

Pfadintegraldarstellung des Ausbreitungskerns

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_T + V(x)$$

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_f - t_i)} | x_i \rangle$$

Zerlege das Zeitintervall $[t_i, t_f]$ in N

Einzelintervalle der Länge $\varepsilon = \frac{t_f - t_i}{N}$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_f - t_i)} = e^{-\frac{i}{\hbar} H N \varepsilon} = (e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon})^N$$

$$\Rightarrow \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} \dots e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon}}_{N \text{ Faktoren}} | x_i \rangle$$

Schiebe an $N-1$ Stellen den Einheitsoperator in
der Form $1 = \int dx_k |x_k\rangle \langle x_k| \quad (k=1, \dots, N-1)$ ein

$$\Rightarrow \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int dx_{N-1} \dots dx_1 \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} | x_{N-1} \rangle \\ \langle x_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} | x_{N-2} \rangle \dots \langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} | x_i \rangle$$

Wegen $[T, V] \neq 0$ gilt natürlich, ~~weil~~ dass
 $e^{-\frac{i}{\hbar} (T+V)\varepsilon} \neq e^{-\frac{i}{\hbar} T\varepsilon} e^{-\frac{i}{\hbar} V\varepsilon}$, für infinitesimal

kleines ε kann man allerdings

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(T+V)\varepsilon} = e^{-\frac{i}{\hbar}T\varepsilon} e^{-\frac{i}{\hbar}V\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

schreiben. Der Kurzzeitkern $K(x_{R+1}, t_{R+1}; x_R, t_R) = K(x_{R+1}, t_R + \varepsilon; x_R, t_R)$ lässt sich also (für $\varepsilon \rightarrow 0$) in der Form

$$\langle x_{R+1} | e^{-\frac{i}{\hbar}(T+V)\varepsilon} | x_R \rangle \approx \langle x_{R+1} | e^{-\frac{i}{\hbar}T\varepsilon} e^{-\frac{i}{\hbar}V\varepsilon} | x_R \rangle$$

schreiben

$$V(x) | x_R \rangle = V(x_R) | x_R \rangle$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \langle x_{R+1} | e^{-\frac{i}{\hbar}(T+V)\varepsilon} | x_R \rangle \approx \langle x_{R+1} | e^{-\frac{i}{\hbar}T\varepsilon} | x_R \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}V(x_R)\varepsilon} \\ &= \int dp_R \langle x_{R+1} | e^{-\frac{i}{\hbar}T\varepsilon} | p_R \rangle \langle p_R | x_R \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}V(x_R)\varepsilon} \quad \text{↑} = \int dp_R | p_R \rangle \langle p_R | \\ &= \underbrace{\int dp_R \langle x_{R+1} | p_R \rangle}_{\frac{e^{ip_R x_{R+1}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}}} \underbrace{\langle p_R | x_R \rangle}_{\frac{e^{-ip_R x_R/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}}} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_R^2}{2m}\varepsilon} e^{-\frac{i}{\hbar}V(x_R)\varepsilon} \\ &= \int \frac{dp_R}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} [p_R \frac{(x_{R+1}-x_R)}{\varepsilon} - H(p_R, x_R)]} \end{aligned}$$

$$\frac{x_{R+1} - x_R}{\varepsilon} = \frac{x_{R+1} - x_R}{t_{R+1} - t_R} \rightarrow \dot{x}_R(t_R)$$

Durchführung der p_k -Integration ($T = \frac{P^2}{2m}$ in diesem Fall wesentlich!) ergibt

$$\langle x_{k+1} | e^{-\frac{i}{\hbar}(T+V)\varepsilon} | x_k \rangle \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon L(x_k, \dot{x}_k)}$$

$L(x_k, \dot{x}_k)$ steht kurz für

$$\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_k)$$

Für den gesamten Ausbreitungskern erhält man daher die Pfadintegraldarstellung

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{N/2} \left[\prod_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_k \right] * e^{\frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} L(x_k, \dot{x}_k)}$$

$x_i, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_f \rightarrow \underline{\text{Kurve } x(t)}$

$$x(t_i) = x_i, \quad x(t_f) = x_f, \quad x_k = x(t_i + k\varepsilon)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} L(x_k, \dot{x}_k) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x(t), \dot{x}(t)) = S[x(t); t_i, t_f]$$

$$\int [dx] := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{N/2} \left[\prod_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_k \right]$$

↑
Maß des Pfadintegrals

→ Pfadintegral (Funktionalintegral) als Grenzwert von gewöhnlichen Integralen

Translationsinvarianz des Maßes des Pfadintegrals

Variablentransformation $x(t) = y(t) + f(t)$

neue Integrationsvariable
 mit $f(t_i) = f(t_f) = 0$

→ Diskretisierung $x_R = y_R + f_R \rightarrow dx_R = dy_R$

→ $[dx] = [dy]$

Kurzschrifweise: $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int [dx] e^{\frac{i}{\hbar} S[x; t_i, t_f]}$

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned}
 K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{N/2} \int dx_{N-1} \dots dx_1 e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_k) \right]} \\
 &= \int [dx(\ell)] e^{iS[x(\ell); t_i, t_f]} \quad x_0 \equiv x_i, \quad x_N \equiv x_f
 \end{aligned}$$

Herleitung der Schrödinger-Gleichung aus der Pfadintegraltheorie.

Wellenfunktion zum Zeitpunkt t : $\psi(x, t)$

Wellenfunktion zum einem infinitesimal späteren Zeitpunkt $t + \varepsilon$:

$$\begin{aligned}\psi(x, t + \varepsilon) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \underbrace{K(x, t + \varepsilon; y, t)}_{= K(x, \varepsilon; y, 0)} \psi(y, t) \\ &= K(x, \varepsilon; y, 0) \quad \text{Kurzzeitkern}\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2} - V(y) \right] \right\} \psi(y, t)$$

Substitution $\xi = y - x$

$$\begin{aligned}\psi(x, t + \varepsilon) &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{\frac{im}{2\varepsilon\hbar} \xi^2} e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x+\xi)} \psi(x+\xi, t) \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{\frac{im}{2\varepsilon\hbar} \xi^2} \left[1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \xi V'(x) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \xi^2) \right] \\ &\quad \left[\psi(x, t) + \xi \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + O(\xi^3) \right]\end{aligned}$$

Ausführung der Fresnelintegrale:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{\frac{im}{2\varepsilon\hbar} \xi^2} &= \left(\frac{2\pi \varepsilon \hbar i}{m} \right)^{1/2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{\frac{im}{2\varepsilon\hbar} \xi^2} \xi = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{\frac{im}{2\varepsilon\hbar} \xi^2} \xi^2 &= \frac{i\varepsilon \hbar}{m} \left(\frac{2\pi \varepsilon \hbar i}{m} \right)^{1/2} \quad \text{unger. Fkt.}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(x, t + \varepsilon) = \psi(x, t) + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$$

$$- \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x) \psi(x, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow i\hbar \underbrace{\frac{\psi(x, t + \varepsilon) - \psi(x, t)}{\varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left(- \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t) \quad \checkmark$$

Beweis der Faltungseigenschaft des Ausbreitungskerns mit Hilfe des Pfadintegrals

$$t_i < t < t_f, \quad t - t_i = L\varepsilon, \quad t_f - t = M\varepsilon$$

$$N = L + M$$

$$\begin{aligned} K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar} \right)^{N/2} \int dx_{N-1} \dots dx_{L+1} dx_L dx_{L-1} \dots dx_1 \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[\sum_{R=0}^{N-1} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_{R+1} - x_R}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_R) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} x_L = x \\ \downarrow \end{array}$$

$$\sum_{R=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{R+1} - x_R}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_R) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{L-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] + \sum_{R=L}^{L+N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{R+1} - x_R}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_R) \right]$$

$$\left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon h} \right)^{N/2} = \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon h} \right)^{L/2} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon h} \right)^{N/2}$$

$$\Rightarrow K(x_f, t_f; x_i, t_i) =$$

$$t = t_L$$

$$x_L = x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{\lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon h} \right)^{N/2} \int dx_{M+L-1} \dots dx_{L+1}}_{K(x_f, t_f; x, t)} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{R=L}^{L+N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{R+1} - x_R}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_R) \right]}$$

$$\underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon h} \right)^{L/2} \int dx_{L-1} \dots dx_1}_{K(x, t; x_i, t_i)} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{L-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_j) \right]}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx K(x_f, t_f; x, t) K(x, t; x_i, t_i) \quad \checkmark$$

wesentlich mühsamer als die Operatormethode

$$U(t_f, t) U(t, t_i) = U(t_f, t_i)$$

Bemerkung: Pfadintegralquantisierung auch für zeitabhängige Potentiale $V(x, t)$ problemlos möglich.

Operatormethode: Lösung der Gleichung für den Zeitentwicklungsoperator

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_i) = H(t) U(t, t_i)$$

in diesem Fall kompliziert

$$U(t, t_i) = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t dt' H(t')}$$

Zeitordnungssymbol

$$T(H(t_1) H(t_2)) = \begin{cases} H(t_1) H(t_2) & \text{falls } t_1 > t_2 \\ H(t_2) H(t_1) & \text{falls } t_2 > t_1 \end{cases}$$

$$[H(t_1), H(t_2)] \stackrel{i.A.}{\neq} 0$$

Wollen für das freie Teilchen verifizieren, dass die Pfadintegralmethode tatsächlich das richtige Ergebnis für den freien Ausbreitungs-
kern liefert:

$$K_o(x_f, t_f; x_i, t_i) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{N/2} \int dx_{N-1} \dots \int dx_1 e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} \right)^2} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{\frac{N-2}{2}} \int dx_{N-1} \dots dx_2 e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{k=2}^{N-1} \frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} \right)^2} \\
 &\quad \times \underbrace{\int dx_1 \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{1/2} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{x_2 - x_1}{\varepsilon} \right)^2} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{1/2} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{x_1 - x_i}{\varepsilon} \right)^2}}_{\left(\frac{m}{2\pi i 2\varepsilon \hbar} \right)^{1/2} e^{\frac{im(x_2 - x_i)}{2\pi 2\varepsilon}}} \\
 &\qquad \qquad \qquad \text{vgl. Aufgabe 6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{\frac{N-3}{2}} \int dx_{N-1} \dots dx_3 e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{k=3}^{N-1} \frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} \right)^2} \\
 &\quad \times \underbrace{\int dx_2 \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{1/2} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{x_3 - x_2}{\varepsilon} \right)^2} \left(\frac{m}{2\pi i 2\varepsilon \hbar} \right)^{1/2} e^{\frac{im(x_2 - x_i)}{2\pi 2\varepsilon}}}_{\left(\frac{m}{2\pi i 3\varepsilon \hbar} \right)^{1/2} e^{\frac{im(x_3 - x_i)}{2\pi 3\varepsilon}}}
 \end{aligned}$$

usw.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i N\varepsilon \hbar} \right)^{1/2} e^{\frac{im(x_f - x_i)}{2\pi N\varepsilon}} \quad N\varepsilon = t_f - t_i \\
 &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} e^{\frac{im(x_f - x_i)}{2\pi \hbar (t_f - t_i)}} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Andere Methode zur Berechnung des freien Ausbreitungs-
kerns: Entwicklung um die klassische Lösung.

$$x_{\text{rel}}(t) = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} (t - t_i) + x_i$$

$$x(t) = x_{\text{rel}}(t) + y(t)$$

$$x(t_i) = x_i, \quad x(t_f) = x_f$$

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2$$

$$y(t_i) = y(t_f) = 0$$

$$S[x_{\text{rel}} + y] = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} [\dot{x}_{\text{rel}}(t) + \dot{y}(t)]^2 =$$

$$= \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{x}_{\text{rel}}(t)^2}_{S_{\text{rel}}} + m \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{x}_{\text{rel}}(t) \dot{y}(t) + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{y}(t)^2$$

S_{rel}

partielle Int.

$$= S_{\text{rel}} - m \int_{t_i}^{t_f} dt \underbrace{\ddot{x}_{\text{rel}}(t)}_0 y(t) + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{y}(t)^2$$

part. Int.

$$= \underbrace{\frac{m}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i}}_{\text{unabh. von } y(t)} + \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} y(t) \left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) y(t)}_{\text{unabh. von } x_i, x_f}$$

$$K_o(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int [dx] e^{i S[x; t_i, t_f]/\hbar}$$

$$[dx] = [dy]$$

$$= \int [dy] e^{i S_{\text{rel}}/\hbar} e^{\frac{i m}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt y(t) \left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) y(t)}$$

$$y(t_i) = y(t_f) \approx 0$$

$$= e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i}} \underbrace{\int [dy] e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt y(t) \left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) y(t)}}_{y(t_i) = y(t_f) = 0}$$

P25

$F(t_f, t_i)$ unabh. von $x_{i,f}$!

$F(t_f, t_i)$ bereits bekannt:

$$F(t_f, t_i) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} = \int [dy] e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt y(t) (-\partial_t^2) y(t)}$$

$$y(t_i) = y(t_f) = 0$$

alternativer Zugang zum Maß $[dy]$ im (obigen) Pfadintegral:

Führe Metrik im Raum aller Pfade ein \rightarrow Volumselement

Betrachte zwei benachbarte Pfade $y(t)$, $y(t) + dy(t)$

Abstandsquadrat zwischen zwei Paden:

$$ds^2 = \int_{t_i}^{t_f} dt [dy(t)]^2$$

entwickle $y(t)$ nach einem vollständigen Orthonormalsystem:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n u_n(t), \quad \int_{t_i}^{t_f} dt u_m(t) u_n(t) = \delta_{mn}$$

$$\Rightarrow dy(t) = \sum_{n=1}^{\infty} dy_n u_n(t)$$

Regularisierung: Beschränke den Raum der Pfade auf jene Elemente, für die nur die ersten N Komponenten y_1, \dots, y_N von Null verschieden sind:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N y_n u_n(t)$$

$$ds^2 = \sum_{n=1}^N (dy_n)^2 \Rightarrow [dy]_{\text{reg}} = dy_1 \dots dy_N \times N_N$$

euklidische Metrik

↑
geeigneter Normierungsfaktor

$$\int [dy] \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dy_1 \dots dy_N N_N \dots$$

Translationsinvarianz leicht zu sehen:

$$y(t) = y'(t) + \underbrace{k(t)}_{\text{sel. Fkt. mit } k(t_i) = k(t_f) = 0}$$

→ Metrik unverändert ⇒ das durch die Metrik induzierte Volumenelement bleibt ebenfalls unverändert

$$\Rightarrow [dy] = [dy']$$

Bemerkung: explizite Konstruktion des Maßes nicht unbedingt erforderlich → Translationsinvarianz ist ausreichend

wollen nun $\int [dy] e^{\frac{i m}{2 \hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt y(t) (-\partial_t^2) y(t)}$ untersuchen
 $y(t_i) = y(t_f) = 0$

als vollständiges Orthonormalsystem bieten sich natürlich die Eigenfunktionen von $-\partial_t^2$ mit den Randbedingungen $u(t_i) = u(t_f) = 0$ an:

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi(t_f - t_i)}} \sin\left(n\pi \frac{t - t_i}{t_f - t_i}\right), \quad n=1,2,\dots$$

$$(1) \quad u_n(t_i) = u_n(t_f) = 0$$

$$(2) \quad -\frac{d^2}{dt^2} u_n(t) = \underbrace{\left(\frac{n\pi}{t_f - t_i}\right)^2}_{\lambda_n} u_n(t)$$

$$(3) \quad \int_{t_i}^{t_f} dt u_m(t) u_n(t) = \delta_{mn}$$

Resultat bekannt!

$$\begin{aligned} & \int [dy] e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dy} y(t) (-\partial_t^2) y(t) \downarrow = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} N_N \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots dy_N e^{\frac{im}{2\hbar} \sum_{n=1}^N \lambda_n y_n^2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} N_N \prod_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} dy_n e^{\frac{im}{2\hbar} \lambda_n y_n^2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} N_N \prod_{n=1}^N \left(\frac{2\pi i \hbar}{m \lambda_n} \right)^{1/2} = \lim_{N \rightarrow \infty} N_N \underbrace{\left(\prod_{n=1}^N \frac{2\pi i \hbar}{m \lambda_n} \right)}_{=: \det_N}^{1/2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} N_N \left(\det_N \frac{m(-\partial_t^2)}{2\pi i \hbar} \right)^{-1/2} \\ \Rightarrow & N_N = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} \left(\det_N \frac{m(-\partial_t^2)}{2\pi i \hbar} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{explizit: } \det_N \frac{m(-\partial_t^2)}{2\pi i \hbar} = \prod_{n=1}^N \frac{m \omega_n}{2\pi i \hbar}$$

$$= \prod_{n=1}^N \left(\frac{m}{2\pi i \hbar} \frac{\pi^2 n^2}{(t_f - t_i)^2} \right) = \left(\frac{m \pi}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)^2} \right)^N \prod_{n=1}^N n^2$$

$$\underline{\text{Bemerkung: }} \det_N (-\partial_t^2) = \prod_{n=1}^N \omega_n = \left(\frac{\pi}{t_f - t_i} \right)^{2N} \prod_{n=1}^N n^2$$

divergent für $N \rightarrow \infty$, aber

$$N_N \left(\det_N \frac{m(-\partial_t^2)}{2\pi i \hbar} \right)^{-1/2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2}$$

Konvergent (per constructionem)

Harmonischer Oszillator

$$\text{Wirkungsintegral} \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt [\dot{x}(t)^2 - \omega^2 x(t)^2]$$

$$\text{Klassische Lösung: } x_{\text{kl}}(t) = x_i \frac{\sin \omega (t_f - t)}{\sin \omega (t_f - t_i)} + x_f \frac{\sin \omega (t - t_i)}{\sin \omega (t_f - t_i)}$$

(siehe Aufgabe 12)

Entwicklung um die klassische Lösung: $x(t) = x_{\text{kl}}(t) + y(t)$

$$S[x_{\text{kl}} + y] = S[x_{\text{kl}}] + \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt y(t) \left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) y(t)$$

$$S[x_{\text{kl}}] = \frac{m}{2} [x_f \dot{x}_{\text{kl}}(t_f) - x_i \dot{x}_{\text{kl}}(t_i)] \quad (\text{siehe Aufgabe 11})$$

$$\Rightarrow S[x_{RL}] = \frac{m\omega}{2\sin\omega(t_f-t_i)} [(x_i^2 + x_f^2) \cos\omega(t_f-t_i) - 2x_i x_f]$$

(siehe Aufgabe 13)

$$\Rightarrow K(x_f, t_f; x_i, t_i) = e^{i S[x_{RL}]/\hbar} \underbrace{\int [dy] e^{\frac{i m}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt y(t) (-\partial_t^2 - \omega^2) y(t)}}_{y(t_i) = y(t_f) = 0}$$

wie im freien Fall unabh. von $x_{i,f}$;
einiger Unterschied: $-\partial_t^2 - \omega^2$
statt $-\partial_t^2$

$$\int [dy] e^{\frac{i m}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt y(t) (-\partial_t^2 - \omega^2) y(t)} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} N_N \left(\det_N \frac{m(-\partial_t^2 - \omega^2)}{2\pi i \hbar} \right)^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\det_N \frac{m(-\partial_t^2)}{2\pi i \hbar} \right)^{1/2} \left(\det_N \frac{m(-\partial_t^2 - \omega^2)}{2\pi i \hbar} \right)^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\det_N \frac{-\partial_t^2 - \omega^2}{-\partial_t^2} \right)^{-1/2}$$

$$\det \frac{-\partial_t^2 - \omega^2}{-\partial_t^2} := \lim_{N \rightarrow \infty} \det_N \frac{-\partial_t^2 - \omega^2}{-\partial_t^2} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{\lambda_n - \omega^2}{\lambda_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_n} \right)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{t_f - t_i} \right)^2 n^2$$

P30

$$\Rightarrow \det \frac{-\partial_t^2 - \omega^2}{-\partial_t^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2(t_f - t_i)^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{\sin x}{x}, \quad x = \omega(t_f - t_i)$$

$$\Rightarrow K(x_p, t_f; x_i, t_i) = e^{i S_{\text{Re}}/\hbar} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin \omega(t_f - t_i)}{\omega(t_f - t_i)}\right)^{-1/2}$$

$$= e^{i S_{\text{Re}}/\hbar} \left(\frac{m \omega}{2\pi i \hbar \sin \omega(t_f - t_i)}\right)^{1/2}$$

Bemerkung: $\sin \omega(t_f - t_i)$ besitzt Nullstellen für $\omega(t_f - t_i) = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ und wechselt dort das Vorzeichen. Man kann daher schreiben:

$$(\sin \omega(t_f - t_i))^{1/2} = |\sin \omega(t_f - t_i)|^{1/2} e^{i n \pi / 2}$$

↑
sog. Maslov-„Korrektur“

$$\text{Bzw. } K(x_p, t_f; x_i, t_i) = e^{i S_{\text{Re}}/\hbar} \left(\frac{m \omega}{2\pi i \hbar |\sin \omega(t_f - t_i)|}\right)^{1/2} e^{-i n \pi / 2}$$

Energieeigenwerte und Energieeigenfunktionen

$$K(x_p, t_f; x_i, t_i) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_f - t_i)} \phi_n(x_p) \phi_n(x_i)^*$$

(siehe P10)

$$T := t_f - t_i$$

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T} \right)^{1/2}$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i m \omega}{2 \hbar \sin \omega T} [(x_i^2 + x_f^2) \cos \omega T - 2 x_i x_f] \right\}$$

$$\cos \omega T = \frac{1}{2} e^{i \omega T} (1 + e^{-2i \omega T})$$

$$i \sin \omega T = \frac{1}{2} e^{i \omega T} (1 - e^{-2i \omega T})$$

$$\Rightarrow K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} e^{-i \omega T / 2} \times (1 - e^{-2i \omega T})^{-1/2}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2\hbar} \left[(x_i^2 + x_f^2) \frac{1 + e^{-2i\omega T}}{1 - e^{-2i\omega T}} - 4 x_i x_f \frac{e^{-i\omega T}}{1 - e^{-2i\omega T}} \right] \right\} \quad \}$$

entwickle diesen Ausdruck
nach Potenzen von $e^{-i\omega T}$

→ lese Energieniveaus und Energiefestzustände

durch Vergleich mit $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} \phi_n(x_f) \phi_n(x_i)^*$ ab

sofort zu sehen: $E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$, $\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$

$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$; Aufgabe 15: Bestimmen Sie $\phi_1(x), \phi_2(x)$!

Quadratische Lagrangefunktionen

$$L' = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + B(t)x\dot{x} - \frac{C(t)}{2} x^2 + D(t)\dot{x} - E(t)x$$

ist äquivalent zu

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{c(t)}{2} x^2 - e(t)x$$

(siehe Aufgabe 16)

Spezialfälle: freies Teilchen ($c=e=0$), harmonischer Oszillatator ($c=m\omega^2$, $e=0$), harmonischer Oszillatator mit zeitabh. äußerer Kraft ($c=m\omega^2$, $e(t) \neq 0$)

Entwicklung um die Klassische Lösung:

$$x(t) = x_{\text{re}}(t) + y(t)$$

$x_{\text{re}}(t)$ ist die Lösung der Klassischen Bewegungsgleichung $m\ddot{x}_{\text{re}} + c(t)x_{\text{re}} + e(t) = 0$

mit den Randbedingungen $x_{\text{re}}(t_i) = x_i$, $x_{\text{re}}(t_f) = x_f$

$$\Rightarrow K(x_f, t_f; x_i, t_i) = e^{i S_{\text{re}}/\hbar} \times \int [dy] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2} \dot{y}(t)^2 - \frac{c(t)}{2} y(t)^2 \right] \right\} = e^{i S_{\text{re}}/\hbar} F(t_f, t_i)$$

$y(t_i) = y(t_f) = 0$

In diesem Fall ist

$$S_{\text{re}} = \frac{m}{2} [x_f \dot{x}_{\text{re}}(t_f) - x_i \dot{x}_{\text{re}}(t_i)] - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \epsilon(t) x_{\text{re}}(t).$$

part. Int.

$$F(t_f, t_i) = \int [dy] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt y(t) \left[-\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} - \frac{c(t)}{2} \right] y(t) \right\}$$

$$y(t_i) = y(t_f) = 0$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} \left(\det \begin{pmatrix} -\partial_t^2 - c(t)/m \\ -\partial_t^2 \end{pmatrix} \right)^{-1/2}$$

man müsste jetzt das Eigenwertproblem

$$[-\partial_t^2 - c(t)/m] u(t) = \mu u(t) \quad \text{mit den RBn } u(t_i) = u(t_f) = 0$$

↑
lösen (nur für spezielle $c(t)$ in geschlossener Form möglich)

es gibt aber eine elegantere Methode zur Berechnung von $F(t_f, t_i)$:

Gelfand - Yaglom- bzw. Van Vleck - Pauli - Morette- Formel

Nir schreiben das Pfadintegral als Grenzwert:

$$F(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon t_i} \right)^{\frac{N+1}{2}} \int dy_N \dots dy_1$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2\varepsilon} (y_j - y_{j-1})^2 - \frac{1}{2} \varepsilon c_j y_j^2 \right] \right\}$$

Bem.: habe im diskretisierten Pfadintegral von P17 N durch $N+1$ ersetzt; $c_j = c(t_j) = c(t_i + j\varepsilon)$; $y_0 = y_{N+1} = 0$

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow F(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{N}_\varepsilon)^{N+1} \underbrace{\int d^N y e^{iy^T B_N y}}_{\frac{\pi^{N/2}}{(\det(-iB_N))^{1/2}}} \\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$B_N = \frac{m}{2\varepsilon\hbar} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\varepsilon}{2\hbar} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & c_N \end{bmatrix}$$

$$F(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi^{N/2} \mathcal{N}_\varepsilon^{N+1}}{(\det(-iB_N))^{1/2}} = : \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar} \frac{1}{f(t_f, t_i)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi^N}{(-i)^N} \frac{\left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{N+1}}{\det B_N} = \frac{m}{2\pi i \hbar} \frac{1}{f(t_f, t_i)}$$

$$\Rightarrow f(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon \left(\frac{2\pi \varepsilon}{m} \right)^N \det B_N$$

→ müssen $\det B_N$ berechnen und den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ durchführen

$$p_N := \left(\frac{2 + \varepsilon}{m} \right)^N \det B_N =$$

$$= \det \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & c_1 & \\ -1 & 2 & -1 & c_2 & \\ 0 & -1 & 2 & c_3 & \\ \hline & & & \ddots & \\ & & & & \end{array} \right] - \frac{\varepsilon^2}{m} \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & c_1 & \\ -1 & 2 & -1 & c_2 & \\ 0 & -1 & 2 & c_3 & \\ \hline & & & \ddots & \\ & & & & \end{array} \right]$$

entwickle p_{j+1} nach der $(j+1)$ -ten Spalte:

$$p_{j+1} = \left(2 - \frac{\varepsilon^2}{m} c_{j+1} \right) p_j - p_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N-1$$

Def.: $p_0 = 1 \Rightarrow$ Formel gilt dann auch für $j=1$

$$p_2 = \underbrace{\left(2 - \frac{\varepsilon^2}{m} c_2 \right) p_1}_{\left(2 - \frac{\varepsilon^2}{m} c_1 \right)} - \frac{p_0}{1}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \frac{\varepsilon^2}{m} c_1 & -1 \\ -1 & 2 - \frac{\varepsilon^2}{m} c_2 \end{bmatrix} = \left(2 - \frac{\varepsilon^2}{m} c_1 \right) \left(2 - \frac{\varepsilon^2}{m} c_2 \right) - 1 \quad \checkmark$$

Umsschreiben der Rekursionsformel:

$$\frac{p_{j+1} - 2 p_j + p_{j-1}}{\varepsilon^2} = - \frac{c_{j+1}}{m} p_j$$

$$\varepsilon p_N \rightarrow f(t_f, t_i) = f(\underbrace{t_i + (N+1)\varepsilon}_{=: t}, t_i)$$

$$\Rightarrow \varepsilon p_j = f(\underbrace{t_i + (j+1)\varepsilon}_{=: t}, t_i)$$

$$\Rightarrow \frac{f(\underbrace{t_i + (j+2)\varepsilon}_{=: t}, t_i) - 2f(\underbrace{t_i + (j+1)\varepsilon}_{=: t}, t_i) + f(\underbrace{t_i + j\varepsilon}_{=: t}, t_i)}{\varepsilon^2}$$

$$= - \frac{c(t_i + (j+1)\varepsilon)}{m} f(\underbrace{t_i + (j+1)\varepsilon}_{=: t}, t_i)$$

$$\frac{f(t + \varepsilon t_i) - 2f(t, t_i) + f(t - \varepsilon, t_i)}{\varepsilon^2} = - \frac{c(t)}{m} f(t, t_i)$$

$\downarrow \varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 f(t, t_i)}{\partial t^2} = - \frac{c(t)}{m} f(t, t_i)$$

Gel'fand - Yaglom Differentialgleichung (GY)

Anfangsbedingungen:

$$f(t_i, t_i) = 0$$

$$\left. \frac{\partial f(t, t_i)}{\partial t} \right|_{t=t_i} = \varepsilon \frac{p_1 - p_0}{\varepsilon} = 2 - \frac{\varepsilon^2}{m} c_1 - 1 \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 1$$

I. M. Gel'fand, A. M. Yaglom: Integration in Functional Spaces and its Application in Quantum Physics, Journal of Mathematical Physics 1 (1960) 48

Probe:

a) freies Teilchen: $f(t, t_i) = t - t_i \rightarrow f(t_i, t_i) = 0 \checkmark$

$$\frac{\partial f(t, t_i)}{\partial t} = 1 \quad \frac{\partial^2 f(t, t_i)}{\partial t^2} = 0 \quad \checkmark$$

b) harmonischer Oszillator: $c(t) = m\omega^2$

$$\frac{\partial^2 f(t, t_i)}{\partial t^2} = -\omega^2 f(t, t_i) \Rightarrow f(t, t_i) = A \cos \omega(t-t_i) + B \sin \omega(t-t_i)$$

$$f(t_i, t_i) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow f(t, t_i) = B \sin \omega(t-t_i)$$

$$\frac{\partial f(t, t_i)}{\partial t} = B \omega \cos \omega(t-t_i)$$

$$\left. \frac{\partial f(t, t_i)}{\partial t} \right|_{t=t_i} = 1 = B \omega \Rightarrow B = \frac{1}{\omega}$$

$$\Rightarrow f(t, t_i) = \frac{\sin \omega(t-t_i)}{\omega} \quad \checkmark \quad (\text{vgl. P30})$$

Bem.: für den harmonischen Oszillator mit einer zeitabh. äußerer Kraft ($c = m\omega^2$, $e(t) \neq 0$) ist die GY-Gleichung wie beim gewöhnlichen harm. Osz. $\Rightarrow f(t_f, t_i)$ unverändert
 $\Rightarrow \langle x_f, t_f; x_i, t_i \rangle = e^{i \int_{t_i}^{t_f} \omega(t) dt} \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega(t_f - t_i)} \right)^{1/2} \Rightarrow e(t) \text{ steckt nur in } \int_{t_i}^{t_f} \omega(t) dt$

weitere Vereinfachung: GY-Gleichung muss nicht einmal gelöst werden, wenn man bereits die klassische Wirkung als Fkt. von x_i, x_f kennt:

$$\frac{1}{f(t_f, t_i)} = - \frac{1}{m} \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial x_i \partial x_f}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \left(\frac{i}{2\pi \hbar} \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial x_i \partial x_f} \right)^{1/2} e^{i S_{\text{cl}} / \hbar}}$$

van Fleck - Pauli - Morette - Formel (VVPM)

Verallgemeinerung auf System mit d Freiheitsgraden

$$(x_1, \dots, x_d) = \vec{x}$$

$$\langle \vec{x}_f, t_f | \vec{x}_i, t_i \rangle = \left(\frac{i}{2\pi \hbar} \det \left(\frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial x_{ai} \partial x_{bf}} \right) \right)^{1/2} e^{i S_{\text{cl}} / \hbar}$$

VVPM - Determinante

Beweis der Äquivalenz von GY und VVPM:

schreibe die klassische Lösung in der Form

$$x_{\text{re}}(t, x_i, \dot{x}_i) = \dot{x}_i F(t) + x_i G(t) + x_{\text{inh}}(t)$$

P39

wobei $F(t)$, $G(t)$, $x_{inh}(t)$ die folgenden Differentialgleichungen mit den angegebenen Anfangsbedingungen erfüllen:

$$m \ddot{F}(t) + c(t) \dot{F}(t) = 0, \quad F(t_i) = 0, \quad \dot{F}(t_i) = 1$$

$$m \ddot{G}(t) + c(t) \dot{G}(t) = 0, \quad G(t_i) = 1, \quad \dot{G}(t_i) = 0$$

$$m \ddot{x}_{inh}(t) + c(t) \dot{x}_{inh}(t) = -e(t), \quad x_{inh}(t_i) = \dot{x}_{inh}(t_i) = 0$$

$\Rightarrow x_{re}(t, x_i, \dot{x}_i)$ ist dann eine Lösung der inh. Dgl.

mit AB $x_{re}(t_i, x_i, \dot{x}_i) = x_i, \quad \dot{x}_{re}(t_i, x_i, \dot{x}_i) = \dot{x}_i$

$\Rightarrow F(t)$ ist Lsg. der GY-Gleichung, d.h.

$$F(t) = f(t, t_i)$$

Verwende nun $x_{re}(t_f, x_i, \dot{x}_i) = x_f$ und

$$\dot{x}_{re}(t_f, x_i, \dot{x}_i) = \dot{x}_f,$$

$$x_f = \dot{x}_i F(t_f) + x_i G(t_f) + x_{inh}(t_f)$$

$$\dot{x}_f = \dot{x}_i \dot{F}(t_f) + x_i \dot{G}(t_f) + \dot{x}_{inh}(t_f)$$

und drücke \dot{x}_i, \dot{x}_f durch x_i, x_f aus:

$$\dot{x}_i = \frac{x_p - x_i G(t_f) - x_{inh}(t_f)}{F(t_f)}$$

$$\dot{x}_p = [x_p - x_i G(t_f) - x_{inh}(t_f)] \frac{\dot{F}(t_f)}{F(t_f)} + x_i \dot{G}(t_f) + \dot{x}_{inh}(t_f)$$

betrachte nun die Wronski-Determinante

$$W(t) := \begin{vmatrix} F(t) & G(t) \\ \dot{F}(t) & \dot{G}(t) \end{vmatrix} = F(t) \dot{G}(t) - G(t) \dot{F}(t)$$

$W(t)$ ist Konstant, denn

$$\frac{d}{dt} W(t) = F(t) \underbrace{\ddot{G}(t)}_{-\frac{c(t)}{m} G(t)} - G(t) \underbrace{\ddot{F}(t)}_{-\frac{c(t)}{m} F(t)} = 0$$

$$\text{Einsetzen der AB ergibt: } W(t_i) = \underbrace{F(t_i)}_0 \dot{G}(t_i) - \underbrace{G(t_i)}_1 \underbrace{\dot{F}(t_i)}_1 = -1$$

$$\Rightarrow W(t) = -1 \quad \text{für bel. } t$$

$$\begin{aligned} P33: S_{RL} &= \frac{m}{2} [x_p \dot{x}_{RL}(t_f) - x_i \dot{x}_{RL}(t_i)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt e(t) x_{RL}(t) \end{aligned}$$

(P41)

$$S_{\text{rel}} = \frac{m}{2} \times_p \left\{ [x_p - x_i G(t_f) - x_{\text{inh}}(t_f)] \frac{\dot{F}(t_f)}{F(t_f)} + x_i \dot{G}(t_f) + \dot{x}_{\text{inh}}(t_f) \right\}$$

$$- \frac{m}{2} x_i \frac{x_p - x_i G(t_f) - x_{\text{inh}}(t_f)}{F(t_f)}$$

$$- \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt e(t) \left\{ \frac{x_p - x_i G(t_f) - x_{\text{inh}}(t_f)}{F(t_f)} F(t) + x_i G(t) + x_{\text{inh}}(t) \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 S_{\text{rel}}}{\partial x_i \partial x_p} = - \frac{m}{2} G(t_f) \frac{\dot{F}(t_f)}{F(t_f)} + \frac{m}{2} \dot{G}(t_f)$$

$$- \frac{m}{2} \frac{1}{F(t_f)}$$

$$= \frac{m}{2} \frac{1}{F(t_f)} \underbrace{[F(t_f) \dot{G}(t_f) - G(t_f) \dot{F}(t_f) - 1]}_{-1}$$

$$= - \frac{m}{F(t_f)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 S_{\text{rel}}}{\partial x_i \partial x_p} = - \frac{m}{F(t_f, t_i)} \checkmark$$

Störungsserie

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \underbrace{V(x, t)}_{\text{" kleine" Störung}}$$

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int [dx] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - V(x(t), t) \right)}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt V(x(t), t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \left[\int_{t_i}^{t_f} dt V(x(t), t) \right]^n$$

$$\Rightarrow K(x_f, t_f; x_i, t_i) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_i}^{t_f} ds_1 \dots \int_{t_i}^{t_f} ds_n \int [dx] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2} V(x(s_1), s_1) \dots V(x(s_n), s_n)$$

$$= \underbrace{\int [dx]}_{K_0(x_f, t_f; x_i, t_i)} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2} \leftarrow \text{freier Propagator}$$

$$- \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} ds \int [dx] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2} V(x(s), s)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_i}^{t_f} ds_1 \int_{t_i}^{t_f} ds_2 \int [dx] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2} V(x(s_1), s_1) \times V(x(s_2), s_2)$$

+ ...

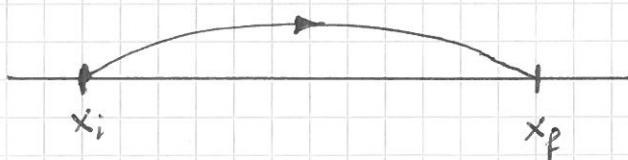
$$\int_{t_i}^{t_f} ds \int [dx] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2} V(x(s), s) =$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dx K_0(x_f, t_f; x, s) V(x, s) K_0(x_s; x_i, t_i)$$

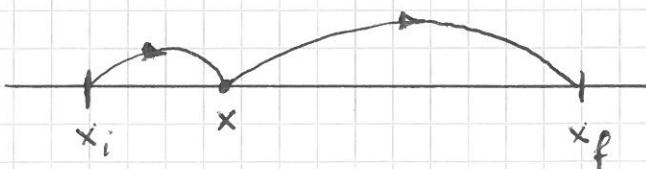
$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = K_0(x_f, t_f; x_i, t_i)$$

$$+ \int_{t_i}^{t_f} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dx K_0(x_f, t_f; x, s) \left[-\frac{i}{\hbar} V(x_s) \right] K_0(x_s; x_i, t_i)$$

$$+ O(V^2)$$

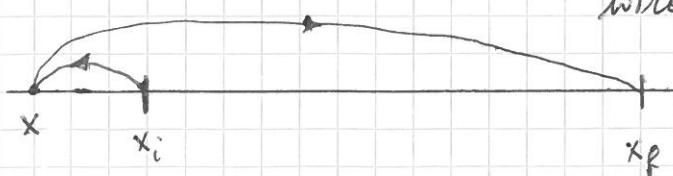


Teilchen wird nicht gestreut $\rightarrow K_0(x_f, t_f; x_i, t_i)$



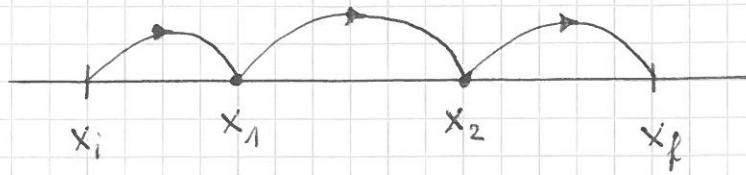
Teilchen wird 1x gestreut

$-\frac{i}{\hbar} V(x, s) ds dx$ = Amplitude, dass das Teilchen im Zeitintervall $[s, s+ds]$ im Bereich $[x, x+dx]$ gestreut wird



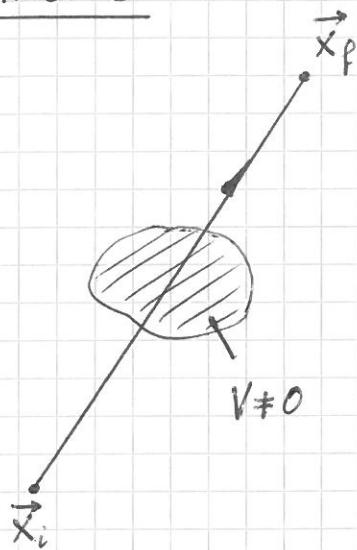
→ auch möglich

P44



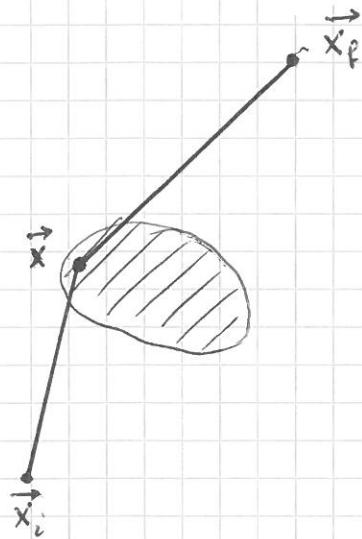
Teilchen wird
2x am Potential
gestreut

in $d=3$:



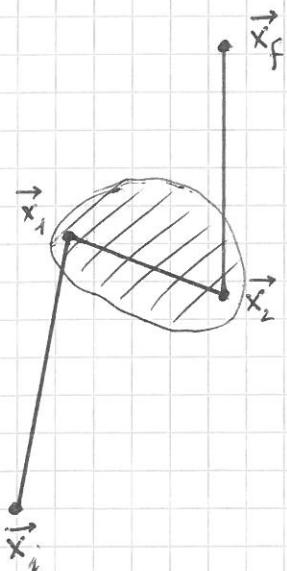
Keine Streuung

$$K_o(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i)$$



1x an V gestreut

$$\int_{t_i}^{t_f} ds \int d^3x K_o(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}, s) \left[-\frac{i}{\hbar} V(\vec{x}, s) \right] K_o(\vec{x}, s; \vec{x}_i, t_i)$$



2x gestreut

uW.

zweimalige Streuung:

$$\frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_i}^{t_f} ds_1 \int_{t_i}^{t_f} ds_2 \int [dx] e^{\frac{i}{\hbar} S_0[x]} V(x(s_1), s_1) V(x(s_2), s_2)$$

$$= \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \left\{ \int_{t_i}^{t_f} ds_2 \int_{t_i}^{s_2} ds_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 K_0(x_f, t_f; x_2, s_2) \right.$$

$$s_2 > s_1 \rightarrow V(x_2, s_2) K_0(x_2, s_2; x_1, s_1) V(x_1, s_1) K_0(x_1, s_1; x_i, t_i)$$

$$+ \int_{t_i}^{t_f} ds_1 \int_{t_i}^{s_1} ds_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 K_0(x_f, t_f; x_1, s_1)$$

$$s_1 > s_2 \rightarrow V(x_1, s_1) K_0(x_1, s_1; x_2, s_2) V(x_2, s_2) K_0(x_2, s_2; x_i, t_i)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} ds_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{t_i}^{t_f} ds_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \left\{ K_0(f, 2) \left(-\frac{i}{\hbar} V(2)\right) \right.$$

$$\times \underbrace{K_0(2, 1) \Theta(s_2 - s_1)}_{\text{Kor}(x_2, s_2; x_1, s_1)} \left(-\frac{i}{\hbar} V(1)\right) K_0(1, i)$$

→ wenn man die retardierten (kausalen) Propagatoren nimmt, kann man bei den Zeitintegrationen immer über den gesamten Bereich $[t_i, t_f]$ integrieren und die $\frac{1}{n!}$ -Faktoren weglassen!

Integralgleichung für Kr

$d\vec{x}_i dt_1$

$$K_r(f, i) = K_{or}(f, i) - \frac{i}{\hbar} \int d\tau_1 K_{or}(f, 1) V(1) K_{or}(1, i)$$

$$+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int d\tau_1 \int d\tau_2 K_{or}(f, 1) V(1) K_{or}(1, 2) V(2) \\ K_{or}(2, i)$$

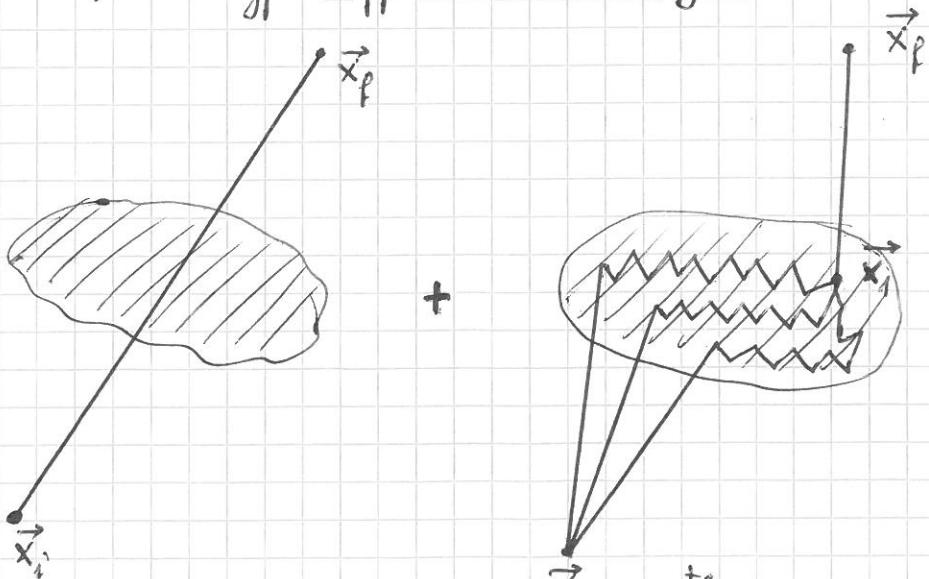
+ ...

$$= K_{or}(f, i) - \frac{i}{\hbar} \int d\tau_1 K_{or}(f, 1) V(1) [K_{or}(1, i)$$

$$- \frac{i}{\hbar} \int d\tau_2 K_{or}(1, 2) V(2) K_{or}(2, i) + \dots]$$

$$= K_{or}(f, i) - \frac{i}{\hbar} \int d\tau_1 K_{or}(f, 1) V(1) K_r(1, i)$$

(exakt) Typ Lippmann - Schrödinger



$$K_r(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i) = K_{or}(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int d^3 \vec{x}_1 K_{or}(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_1, t_1) V(\vec{x}_1, t_1) \\ K_r(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_i, t_i)$$

Störungsreihe für Wellenfunktion (Bornsche Reihe)

$$\psi(x, t)$$

$$\psi(x_f, t_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i K_r(x_f, t_f; x_i, t_i) \underbrace{\psi(x_i, t_i)}_{\text{Wellenfkt. zum Zeitpunkt } t_i \text{ (AB)}} \quad t_f > t_i$$

Wellenfkt. zum
Zeitpunkt t_i (AB)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i K_{or}(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i)$$

$$- \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx K_{or}(x_f, t_f; x, t) V(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i K_r(x, t; x_i, t_i) \underbrace{\psi(x_i, t_i)}_{\psi(x, t)}$$

⇒ Lippmann - Schwinger - Gleichung für die Wellenfunktion

$$\psi(x_f, t_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i K_{or}(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i)$$

$\phi(x_f, t_f)$ (freie Zeuentwicklung des Anfangszustands $\psi(x_i, t_i)$)

$$- \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx K_{or}(x_f, t_f; x, t) V(x, t) \psi(x, t)$$

Iteration dieser Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}\psi(x_f, t_f) &= \phi(x_f, t_f) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int dx K_{\text{or}}(x_f, t_f; x, t) V(x, t) \phi(x, t) \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_i}^{t_f} dt_2 \int dx_2 \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int dx_1 K_{\text{or}}(x_f, t_f; x_2, t_2) V(x_2, t_2) \\ &\quad \times K_{\text{or}}(x_2, t_2; x_1, t_1) V(x_1, t_1) \phi(x_1, t_1)\end{aligned}$$

+ ...

Bornsche Reihe

typische Situation: Streuung eines Teilchens mit scharfem Anfangsimpuls p an einem Potential

$$\rightarrow \phi(x, t) = e^{ipx/\hbar} e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar} t}$$

Literatur: Matthias Blau: Notes on (semi-)advanced quantum mechanics:
The path integral approach to quantum mechanics
www.blau.itp.unibe.ch/lecturenotes.html

R. Rosenfelder: Pfadintegrale in der Quantenphysik, arXiv: 1209.1315

R.P. Feynman, A.R. Hibbs: Quantum Mechanics and Path Integrals
McGraw-Hill (1965)