Übungen zu Quantenmechanik II, Sommersemester 2015

In den ersten beiden Beispielen soll die Formel

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp(-ax^2 + bx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(b^2/4a), \quad a, b \in \mathbb{C}, \; \operatorname{Re} a > 0$$

(Gaußsches Integral) bewiesen werden. Die Wurzel $\sqrt{a}$ ist dabei als $\sqrt{a} := \sqrt{|a|}e^{i\theta/2}$ zu verstehen, wobei $a = |a|e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

1. Berechnen Sie zunächst das Integral $I(a,0)$. Sein Quadrat,

$$I(a,0)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ax^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, e^{-ay^2} = \int_{\mathbb{R}^2} dx \, dy \, e^{-a(x^2+y^2)},$$

kann leicht durch Einführen von Polarkoordinaten berechnet werden. Den ursprünglichen Ausdruck $I(a,0)$ erhält man dann durch Ziehen der Wurzel, wobei die damit verbundene Mehrdeutigkeit durch ein Stetigkeitsargument behoben werden kann.

2. Stellen Sie nun mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes eine Beziehung zwischen dem Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left(-a(x-c)^2\right), \quad c \in \mathbb{C}$$

und $I(a,0)$ her. Das erzielte Resultat gestattet Ihnen schließlich die Berechnung von $I(a,b)$.

3. Bestimmen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ax^2} x^{2n} \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ax^2} x^{2n+1}, \quad a \in \mathbb{C}, \; \operatorname{Re} a > 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Den Wert des ersten Integrals erhalten Sie, indem Sie $I(a,0)$ n-mal nach a differenzieren. Für die Bestimmung des zweiten Integrals ist *keine* Rechnung notwendig!

4. Die Fresnelschen Integrale sind durch

$$C(t) = \int_0^t dx\ \cos x^2, \quad S(t) = \int_0^t dx\ \sin x^2$$

definiert, wobei

$$\int_0^t dx\, e^{ix^2} = C(t) + iS(t)$$

gilt.

(a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $C(-t)$ und $C(t)$ beziehungsweise zwischen $S(-t)$ und $S(t)$?

(b) Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, dass das Kurvenintegral $\oint_\Gamma dz \exp(iz^2)$ für eine beliebige geschlossene Kurve Γ verschwindet (warum?). Finden Sie eine geeignete Kurve Γ, sodass Sie $\int_0^\infty dx\ \exp(-x^2)$ mit $\int_0^\infty dx\ \exp(ix^2)$ in Beziehung setzen können.

(c) Welche Werte erhalten Sie für $C(\pm\infty)$ und $S(\pm\infty)$?

5. Verwenden Sie die Resultate der vorigen Aufgabe um

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\pm ix^2}$$

zu bestimmen. Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf die Berechnung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i\alpha x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0,$$

wobei Sie zunächst die Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$ unterscheiden. Finden Sie sodann eine kompakte Notation, um Ihr Resultat für beide Fälle gleichzeitig anzugeben. Zeigen Sie schließlich, dass Sie das Fresnelintegral auch als Limes unseres Gaußschen Standardintegrals erhalten können:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} I(\delta - i\alpha, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i\alpha x^2}.$$

6. Überprüfen Sie die Faltungseigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, K_0(x_f, t_f; x, t) K_0(x, t; x_i, t_i) = K_0(x_f, t_f; x_i, t_i), \quad t_i < t < t_f,$$

des freien Ausbreitungskerns

$$K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}} \exp\left(\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}\right)$$

durch eine *explizite* Rechnung.

7. Bestimmen Sie den Ausbreitungskern $K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i) \equiv \langle \vec{x}_f, t_f | \vec{x}_i, t_i \rangle$ für ein freies Teilchen in drei Raumdimensionen auf „konventionelle" Art, also *ohne* Verwendung von Pfadintegralmethoden.

8. Die retardierte (kausale) Greenfunktion $G_r(t, \vec{x})$ der Schrödingergleichung für ein freies Teilchen mit Masse m in drei Raumdimensionen ist durch

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right) G_r(t, \vec{x}) &= i\hbar\, \delta(t)\delta^{(3)}(\vec{x}), \\ G_r(t, \vec{x}) &= 0 \quad \text{für } t < 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Ermitteln Sie die Fouriertransformierte $\widetilde{G}\left(\omega, \vec{k}\right)$ der Greenfunktion. Aus dieser kann $G_r(t, \vec{x})$ sodann berechnet werden, wobei Sie für die notwendige Integration über ω den Residuensatz verwenden.

9. Verifizieren Sie durch *explizite* Rechnung, dass $K_0(\vec{x}, t; \vec{0}, 0)$ die Schrödingergleichung

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right) K_0(\vec{x}, t; \vec{0}, 0) = 0$$

erfüllt.

10. A, B seien nicht miteinander kommutierende Operatoren. Der Operator C ist durch

$$e^{\varepsilon(A+B)} = e^{\varepsilon A} e^{\varepsilon B} e^{\varepsilon^2 C}$$

definiert, wobei ε eine kleine Größe ist. Drücken Sie C in führender Ordnung von ε durch A und B aus.

Hinweis: Entwickeln Sie beide Seiten der Gleichung bis zur notwendigen Ordnung in ε.

11. Das Wirkungsintegral eines harmonischen Oszillators ist durch

$$S[x] = \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \, \left[\dot{x}(t)^2 - \omega^2 x(t)^2 \right]$$

gegeben. Sei $x_{\mathrm{kl}}(t)$ die Lösung der klassischen Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}_{\mathrm{kl}}(t) + \omega^2 x_{\mathrm{kl}}(t) = 0$$

mit den Randbedingungen $x_{\mathrm{kl}}(t_i) = x_i$, $x_{\mathrm{kl}}(t_f) = x_f$. Zeigen Sie, dass die klassische Wirkung $S[x_{\mathrm{kl}}]$ durch die Randterme $x_{i,f}$ und $\dot{x}_{\mathrm{kl}}(t_{i,f})$ ausgedrückt werden kann:

$$S[x_{\mathrm{kl}}] = \frac{m}{2} \left[x_f \, \dot{x}_{\mathrm{kl}}(t_f) - x_i \, \dot{x}_{\mathrm{kl}}(t_i) \right].$$

12. Zeigen Sie, dass die klassische Lösung $x_{\mathrm{kl}}(t)$ durch

$$x_{\mathrm{kl}}(t) = x_i \frac{\sin \omega(t_f - t)}{\sin \omega(t_f - t_i)} + x_f \frac{\sin \omega(t - t_i)}{\sin \omega(t_f - t_i)}$$

gegeben ist.

13. Überprüfen Sie die Formel für die klassische Wirkung des harmonischen Oszillators:

$$S[x_{\mathrm{kl}}] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_f - t_i)} \left[(x_i^2 + x_f^2) \cos \omega(t_f - t_i) - 2 x_i x_f \right].$$

14. Der Propagator des harmonischen Oszillators ist durch

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega(t_f - t_i)}} \; e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{\mathrm{kl}}]}$$

gegeben. Überprüfen Sie, dass $K(x, t; 0, 0)$

(a) die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K(x, t; 0, 0) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) K(x, t; 0, 0),$$

(b) die Normierungsbedingung $K(x, 0; 0, 0) = \delta(x)$ erfüllt, und

(c) sich im Limes $\omega \to 0$ der Ausbreitungskern eines freien Teilchens ergibt.

15. Bestimmen Sie die ersten drei Energieeigenwerte E_0, E_1, E_2 des harmonischen Oszillators und die dazugehörigen Energieeigenfunktionen $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ durch Vergleich des Propagators mit

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_nT/\hbar} \phi_n(x_f)\phi_n(x_i)^*, \qquad T := t_f - t_i.$$

Hinweis: Siehe VO, P30.

16. Zeigen Sie die physikalische Äquivalenz der Lagrangefunktionen

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{c(t)}{2}x^2 - e(t)x, \\ L' &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + B(t)x\dot{x} - \frac{C(t)}{2}x^2 + D(t)\dot{x} - E(t)x \end{aligned}$$

(a) mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung,

(b) durch partielle Integration im Wirkungsintegral.

17. Vereinfachen Sie die klassische Wirkung

$$S[x_{\mathrm{kl}}] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2}\, \dot{x}_{\mathrm{kl}}(t)^2 - \frac{c(t)}{2}\, x_{\mathrm{kl}}(t)^2 - e(t)x_{\mathrm{kl}}(t) \right)$$

durch partielle Integration und Verwendung der Bewegungsgleichung.

18. Die führende Bornsche Näherung für die Wellenfunktion eines Teilchens, das an einem Potential $V(x)$ gestreut wird, lautet

$$\psi(x_f, t_f) = \phi(x_f, t_f) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int dx\, K_0(x_f, t_f; x, t)\, V(x)\, \phi(x, t) + \ldots,$$

wobei $\phi(x, t)$ die freie Zeitentwicklung des Anfangszustands beschreibt. Untersuchen Sie Reflexion und Transmission des Teilchens mit

$$\phi(x, t) = \exp(ikx) \exp(-i\hbar k^2 t/2m), \qquad k > 0,$$

an dem Deltapotential $V(x) = \lambda\delta(x)$ zur Ordnung λ. Vergleichen Sie Ihr Resultat für die Reflexionsamplitude $R(k)$ und die Transmissionsamplitude $T(k)$ mit den exakten Ergebnissen (siehe T2-Skriptum, S. 63).

Hinweis: Verwenden Sie die Methode der stationären Phase zur Durchführung der Zeitintegration. Geben Sie eine physikalische Interpretation jener Zeit t_s, für welche die Phase stationär wird.

- Die Bewegungsgleichung eines Operators $O(t)$ im Heisenbergbild lautet:
$$\frac{dO(t)}{dt} = \frac{\partial O(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H, O(t)].$$
- Der Hamiltonoperator eines Teilchens mit Masse m, Ladung q und Spin s, das sich in einem äußeren elektromagnetischen Feld befindet, lautet:
$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(t, \vec{X})\right]^2 + q\phi(t, \vec{X}) - \gamma\vec{S} \cdot \vec{B}(t, \vec{X}), \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

19. Berechnen Sie $\vec{V}(t) = d\vec{X}(t)/dt$.

20. Berechnen Sie $m\, d\vec{V}(t)/dt$.

21. Berechnen Sie $d\vec{S}(t)/dt$.

22. Bei der Bewegung eines Teilchens in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ ist die Zeitabhängigkeit der Operatoren $X(t)$ und $Y(t)$ durch
$$\begin{aligned} X(t) &= \bar{X} + \frac{1}{\omega}\left[\dot{X}(0)\sin\omega t - \dot{Y}(0)\cos\omega t\right], \\ Y(t) &= \bar{Y} + \frac{1}{\omega}\left[\dot{X}(0)\cos\omega t + \dot{Y}(0)\sin\omega t\right] \end{aligned}$$
gegeben (siehe VO). Berechnen Sie die Kommutatoren
$$[\dot{X}(t), \dot{Y}(t)],\ [\bar{X}, \bar{Y}],\ [\bar{X}, \dot{X}(t)],\ [\bar{X}, \dot{Y}(t)],\ [\bar{Y}, \dot{X}(t)],\ [\bar{Y}, \dot{Y}(t)].$$

23. Ein spinloses Teilchen bewege sich in dem homogenen Magnetfeld des vorigen Beispiels. Der Operator der z-Komponente des *physikalischen* Bahndrehimpulses (bezüglich des Kreismittelpunktes $(\bar{X}, \bar{Y})$) ist durch
$$L_z(t) = m\left[\left(X(t) - \bar{X}\right)\dot{Y}(t) - \left(Y(t) - \bar{Y}\right)\dot{X}(t)\right]$$
definiert. Zeigen Sie, dass der Operator L_z zeitlich konstant ist und drücken Sie ihn durch H aus.

24. Ladungs- und Stromdichte eines geladenenen Teilchens mit magnetischem Moment $\vec{\mu}$, das sich in einem äußeren elektromagnetischen Feld bewegt, sind durch

$$\rho = q\psi^\dagger\psi, \quad \vec{j} = \frac{q}{2}\left[\psi^\dagger\left(\vec{V}\psi\right) + \left(\vec{V}\psi\right)^\dagger\psi\right] + c\,\mathrm{rot}\left(\psi^\dagger\vec{\mu}\psi\right)$$

gegeben, wobei der Geschwindigkeitsoperator die Form

$$\vec{V} = \frac{1}{m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)$$

besitzt. Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung $\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$ erfüllt ist.

25. Wir betrachten das freie elektromagnetische Feld mit periodischen Randbedingungen in einer Schachtel $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$ mit dem Volumen $V = L_1 L_2 L_3$. Die allgemeine Lösung für das Vektorpotential in der Coulombeichung hat dann die Form

$$\begin{aligned}\vec{A}(t,\vec{x}) &= \sum_{\vec{k},\lambda}\left(\underbrace{\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}}_{\vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{x})}\underbrace{e^{-i\omega_{\vec{k}}t}b_{\vec{k},\lambda}}_{b_{\vec{k},\lambda}(t)} + \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}e^{+i\omega_{\vec{k}}t}b^*_{\vec{k},\lambda}\right)\\ k_i &= \frac{2\pi n_i}{L_i},\ n_i \in \mathbb{Z}; \quad \omega_{\vec{k}} = c\left|\vec{k}\right|; \quad \vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}\end{aligned}$$

Geben Sie die explizite Form des elektrischen und magnetischen Feldes an!

26. Zeigen Sie, dass sich mit der Konvention $\vec{\varepsilon}_{-\vec{k},1} = -\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}$, $\vec{\varepsilon}_{-\vec{k},2} = \vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}$ für die linearen Polarisationsvektoren die Beziehungen $\vec{\varepsilon}^{\,*}_{-\vec{k},\pm} = -\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\pm}$ für die zirkularen Polarisationsvektoren ergeben.

27. Zeigen Sie ($\lambda = \pm$):

$$\int_\Omega d^3x\,\vec{u}^{\,*}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{x})\cdot\vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k}'\vec{k}}\,\delta_{\lambda'\lambda}, \quad \int_\Omega d^3x\,\vec{u}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{x})\cdot\vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{x}) = -\delta_{\vec{k}',-\vec{k}}\,\delta_{\lambda\lambda'}.$$

28. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega d^3x\,\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)^2 = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d^3x\,\vec{A}\cdot\ddot{\vec{A}}$$

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration, die Feldgleichung $\Box\vec{A} = 0$ und die Eichbedingung $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$.

29. Drücken Sie die Energie des elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{E}_{\text{Feld}} = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\Omega} d^3x \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\Omega} d^3x \left[\frac{1}{c^2} \dot{\vec{A}}^2 + \left(\operatorname{rot} \vec{A} \right)^2 \right]$$

durch die Fourierkoeffizienten $b_{\vec{k},\lambda}$ aus.

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat des vorigen Beispiels.

30. Drücken Sie den Impuls des elektromagnetischen Feldes

$$\vec{P}_{\text{Feld}} = \frac{1}{4\pi c} \int\limits_{\Omega} d^3x \, \vec{E} \times \vec{B}$$

durch die Fourierkoeffizienten $b_{\vec{k},\lambda}$ aus.

Hinweis: Zeigen Sie, dass man mit Hilfe von partieller Integration und der Eichbedingung den Feldimpuls in der Form

$$P_i = -\frac{1}{4\pi c^2} \int\limits_{\Omega} d^3x \, \dot{A}_j \nabla_i A_j$$

schreiben kann.

31. Ausgedrückt durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lautet der Feldoperator des freien elektromagnetischen Feldes:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}}} \left(e^{-ik\cdot x} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} + h.k. \right), \quad k \cdot x = \omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x}.$$

Verifizieren Sie, dass seine zeitliche Änderung tatsächlich durch die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left[H, \vec{A}(t, \vec{x}) \right]$$

bestimmt ist.

32. Zeigen Sie, dass die räumliche Änderung des Feldoperators durch die Gleichung

$$\nabla_j A_k(t, \vec{x}) = -\frac{i}{\hbar} \left[P_j, A_k(t, \vec{x}) \right]$$

beschrieben wird, wobei $\vec{P}$ der Impulsoperator des elektromagnetischen Feldes ist.

33. Überzeugen Sie sich davon, dass die in den beiden vorangegangenen Beispielen angegebenen Beziehungen der infinitesimalen Version der Raum-Zeit-Translation des Feldoperators

$$\vec{A}(x+a) = e^{iP\cdot a/\hbar}\vec{A}(x)\, e^{-iP\cdot a/\hbar}$$

entsprechen, wobei $P^\mu = \left(H/c, \vec{P}\right)$ und $x^\mu = (ct, \vec{x})$.

34. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und $\psi_1, \ldots, \psi_n$ seien beliebige Vektoren eines Einteilchenhilbertraums $\mathcal{H}^{(1)}$. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\langle\varphi_1, \ldots, \varphi_n|\psi_1, \ldots, \psi_n\rangle$ der in der Vorlesung definierten Vektoren $|\varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle \in \mathcal{H}^{(n)}$ und $|\psi_1, \ldots, \psi_n\rangle \in \mathcal{H}^{(n)}$ durch die Permanente (für Bosonen) bzw. die Determinante (für Fermionen) der $n\times n$-Matrix mit den Elementen $\langle\varphi_i|\psi_j\rangle$ gegeben ist.

35. $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^{\infty}$ sei ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathcal{H}^{(1)}$. Beweisen Sie die im Fall von Bosonen *und* Fermionen geltende Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{n!}\sum_{\alpha_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_n=1}^{\infty}|\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n| = \mathbb{1}^{(n)}.$$

Hinweis: Wenden Sie die linke Seite des obigen Ausdrucks auf den Vektor $|\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ an.

36. Zwischen zwei identischen, spinlosen Teilchen wirke eine Kraft, welche durch das Zweiteilchenpotential

$$V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) \equiv V^{(2)}(|\vec{x}-\vec{y}|)$$

beschrieben werde. Der entsprechende in $\mathcal{H}^{(2)}$ wirkende Operator ist dann durch

$$V^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, |\vec{x}, \vec{y}\rangle V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y})\langle\vec{x}, \vec{y}|$$

gegeben. Verifizieren Sie diese Behauptung durch Anwendung von $V^{(2)}$ auf den Zweiteilchenzustand $|\vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle$.

37. Zeigen Sie, dass der im Fockraum wirkende Operator

$$V = \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, a^\dagger(\vec{x})a^\dagger(\vec{y})V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y})a(\vec{y})a(\vec{x})$$

die Eigenschaft $V|\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\rangle = \sum_{i<j} V^{(2)}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)|\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\rangle$ hat.

38. Berechnen Sie die zeitliche Änderung des Vernichtungsoperators $a_\sigma(t,\vec{x})$ gemäß der Heisenberggleichung $\dot{a}_\sigma(t,\vec{x}) = (i/\hbar)[H, a_\sigma(t,\vec{x})]$ für den Hamiltonoperator

$$H(t) = \sum_\sigma \int d^3x\, a_\sigma^\dagger(t,\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x}) \right) a_\sigma(t,\vec{x}).$$

39. Wie lautet das Wirkungsintegral für eine nichtrelativistische Feldtheorie spinloser Teilchen zwischen denen eine durch das Zweikörperpotential $V^{(2)}(\vec{x},\vec{y}\,) \equiv V^{(2)}(|\vec{x}-\vec{y}\,|)$ beschriebene Wechselwirkung herrscht? Ermitteln Sie die daraus folgende Feldgleichung.

40. Die Fourierzerlegung des Feldoperators eines freien reellen Skalars lautet

$$\phi(x) = \int d\mu(p) \left[a(p) e^{-ip\cdot x} + a(p)^\dagger e^{ip\cdot x} \right].$$

Zeigen Sie, dass man $a(p)$ und $a(p)^\dagger$ aus $\phi(x)$ durch die Relationen

$$a(p) = i \int d^3x\, e^{ip\cdot x} \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \phi(x), \quad a(p)^\dagger = -i \int d^3x\, e^{-ip\cdot x} \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \phi(x)$$

erhalten kann.

41. Zeigen Sie mit Hilfe der eben angegebenen Formeln, dass man die Vertauschungsrelationen für $a(p)$ und $a(p)^\dagger$ aus den kanonischen Vertauschungsrelationen für ϕ und $\dot{\phi}$ herleiten kann.

42. Zeigen Sie, dass die aktive Drehung eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit dem Drehwinkel α um die Drehachse $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$, Rechte-Hand-Regel) durch $\vec{x}' = R(\vec{\alpha})\vec{x} = \cos\alpha\, \vec{x} + (1 - \cos\alpha)\, \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x}) + \sin\alpha\, \vec{n} \times \vec{x}$, $\vec{\alpha} = \alpha\, \vec{n}$, beschrieben wird. Geben Sie die Matrixdarstellung von $R(\vec{\alpha})$ bezüglich der Standard-Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ an.

Hinweis: Zerlegen Sie den Vektor $\vec{x}$ in einen Anteil parallel bzw. normal zur Drehachse und verwenden Sie die Linearität der Transformation $R(\vec{\alpha})$.

43. Zeigen Sie, dass jedes $A \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ für eine geeignete Wahl des Drehvektors $\vec{\alpha}$ stets in der Form $A = R(\vec{\alpha})$ geschrieben werden kann.

Hinweis: Fassen Sie A als Element von $L(\mathbb{C}^3)$ auf. Was folgt für die Eigenwerte und Eigenvektoren von A aus den Bedingungen $A^* = A$, $A^T A = \mathbb{1}$ und $\det A = 1$? Verwenden Sie den Spektralsatz für normale Operatoren, um Ihr Endresultat zu erhalten.

44. Zeigen Sie

$$U(\vec{\alpha}) := e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}/2} = \cos\frac{\alpha}{2} - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\alpha}{2}$$

auf wenigstens *zwei verschiedene* Arten! In dieser Formel bezeichnen

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

die Paulischen Spinmatrizen, $\vec{n}$ ist ein Einheitsvektor in Richtung des Drehvektors $\vec{\alpha} = \alpha\,\vec{n}$.

45. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma_i U(\vec{\alpha})\sigma_j U(\vec{\alpha})^\dagger\right) = \left(R(\vec{\alpha})\right)_{ij}$$

46. Zeigen Sie, dass man $U \in \mathrm{SU}(2)$ aus dem dazugehörigen $R \in \mathrm{SO}(3)$ durch die Formel

$$U = \pm\frac{\mathbb{1}_2 + R_{ij}\sigma_i\sigma_j}{2\sqrt{1 + \mathrm{Tr}\,R}}$$

erhält.

47. Berechnen Sie $\mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)$ für $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$.

48. Zeigen Sie:

$$e^{-\vec{u}\cdot\vec{\sigma}/2} = \cosh\frac{u}{2} - \vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sinh\frac{u}{2}, \qquad \vec{u} = u\,\vec{n},\ |\vec{n}| = 1,\ u \geq 0.$$

49. Die Formel

$$L^\mu_{\ \nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\bar{\sigma}^\mu A\sigma_\nu A^\dagger\right)$$

bildet $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ auf $L = (L^\mu_{\ \nu}) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ ab. Bestimmen Sie L für $A = \exp(-u\,\sigma^3/2)$. Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen dem Parameter u und der Relativgeschwindigkeit V der beiden durch die Lorentztransformation L verbundenen Inertialsysteme.

50. Bestimmen Sie das zu $A = \exp(-\vec{u}\cdot\vec{\sigma}/2)$ gehörige $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ (allgemeine Form einer reinen Geschwindigkeitstransformation).