46. Betrachten Sie die zeitabhängige Lagrangefunktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - \frac{m\omega^2}{2} \vec{x}^2 \right) e^{\gamma t}$$

   (a) Berechnen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion.

   (b) Wie lauten die Euler-Lagrange Gleichungen?

   (c) Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

47. Berechnen Sie die Hamiltonfunktion $H(\vec{x}, \vec{p})$ des relativistischen Punktteilchens im elektromagnetischen Feld durch Legendretransformation von

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -m\, c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - q\, \Phi(\vec{x}, t) + q\, \frac{\dot{\vec{x}}}{c}\, \vec{A}(\vec{x}, t)$$

   Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

48. Berechnen Sie die Hamiltonfunktion $H(\vec{x}, \vec{p})$, die der Lagrangefunktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}\, g_{ab}(\vec{x})\, \dot{x}_a \dot{x}_b - U(\vec{x}), \quad a, b = 1, 2, 3$$

   zugeordnet ist. Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

49. Gegeben sei die Hamiltonfunktion $H(\vec{x}, \vec{p}, t)$

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + U(\vec{x})$$

   und die Erzeugende $F_1(\vec{x}, \vec{X}, t)$ von kanonischen Transformationen

$$F_1(\vec{x}, \vec{X}, t) = \vec{x} \cdot \vec{X}$$

   Bestimmen Sie die neue Hamiltonfunktion $\tilde{H}(\vec{X}, \vec{P}, t)$ und vergleichen Sie diese mit $H(\vec{x}, \vec{p}, t)$. Welche Bedeutung haben die neuen Koordinaten $\vec{X}$ und Impulse $\vec{P}$?

50. Beweisen Sie, dass eine Punktransformation

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{X} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

   als kanonische Transformation dargestellt werden kann; wie müssen die Impulse transformiert werden?
   HINWEIS: $F_2(\vec{x}, \vec{P}, t) = \vec{f}(\vec{x}, t)\vec{P}$