31. Für eine passive Drehung im $\mathbf{R}^3$, die durch Drehrichtung $\vec{\alpha}$ bzw. Drehwinkel $\alpha = |\vec{\alpha}|$ festgelegt ist, wurde in der Vorlesung angegeben, dass

$$\vec{x}' = \frac{(\vec{\alpha}\vec{x})}{\alpha^2}\vec{\alpha} + \left(\vec{x} - \frac{(\vec{\alpha}\vec{x})}{\alpha^2}\vec{\alpha}\right) cos\,\alpha - \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} \times \vec{x}\, sin\,\alpha =: \; R\vec{x}.$$

   (a) Leiten Sie diese Formel gemäß des folgenden Hinweises her:
   HINWEIS: Die Projektion von $\vec{x}$ auf die Richtung der Drehachse $\vec{x}_{||} = \frac{(\vec{\alpha}\vec{x})}{\alpha^2}\vec{\alpha}$ bleibt unter der Drehung ungeändert, während die zur Drehachse senkrechten Anteile $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \frac{(\vec{\alpha}\vec{x})}{\alpha^2}\vec{\alpha}$ und $\vec{x}'_\perp = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} \times \vec{x}$ um den Winkel α gedreht werden; $\frac{\vec{x}_\perp}{|\vec{x}_\perp|}, \frac{\vec{x}'_\perp}{|\vec{x}'_\perp|}$ und $\frac{\vec{\alpha}}{\alpha}$ bilden ein rechtshändiges kartesisches Basissystem.

   (b) Wie lautet die Drehmatrix R_{ik} in **allgemeiner Komponentenschreibweise?**

32. Zeigen Sie, dass eine allgemeine Galileitransformation

$$G(t_0, \vec{x}_0, \vec{\alpha}, \vec{v}) \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - t_0 \\ R\vec{x} - \vec{v}t - \vec{x}_0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bildet.

33. Beweisen Sie, dass die Kurve mit kürzestem Abstand zwischen zwei Punkten im $\mathbf{R}^2$ wie auch im $\mathbf{R}^3$ eine Gerade ist.

34. Beweisen Sie für eine nicht explizit von der Zeit abhängige Lagrangefunktion $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$, dass

$$\dot{x}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} - L = const.$$

gilt.

35. Gegeben sei die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens unter Einfluss eines veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldes

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - q\,\Phi(\vec{x}, t) + q\,\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\,\vec{A}(\vec{x}, t)$$

Dabei soll q die elektrische Ladung des Teilchens sein. Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen auf und vergleichen Sie mit der Lorentzkraft

$$m\ddot{\vec{x}} = q\left(\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B}(\vec{x}, t)\right)$$

Drücken Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x}, t)$ sowie das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{x}, t)$ durch die beiden Funktionen $\Phi(\vec{x}, t)$ und $\vec{A}(\vec{x}, t)$ aus.