21. Betrachten Sie das vorangegangene Beispiel bei verschwindenden äußeren Kräften.

    (a) Finden Sie neue Koordinaten $\vec{y}_i$, sodass das N-Teilchen System von gekoppelten harmonischen Oszillatoren im $\mathbf{R}^3$ in ein N-Teilchen System von ungekoppelten harmonischen Oszillatoren im $\mathbf{R}^3$ übergeführt werden kann.

    (b) Wie lauten in diesem Fall die kinetische Energie des Systems $K_{\vec{y}_i}$ und das Potential $U_{\vec{y}_i}$?

    (c) Diskutieren Sie explizit den Fall $N = 2$. Stellen sie den Zusammenhang zwischen kinetischer und potentieller Energie K, U des ursprünglichen gekoppelten Systems zu kinetischer und potentieller Energie $K_{\vec{y}_i}$ und $U_{\vec{y}_i}$ des ungekoppelten Systems her.

22. Betrachten Sie Beispiel (21) für allgemeines N. Stellen sie den Zusammenhang zwischen kinetischer und potentieller Energie K, U des ursprünglichen gekoppelten Systems zu kinetischer und potentieller Energie $K_{\vec{y}_i}$ und $U_{\vec{y}_i}$ des ungekoppelten Systems her.

23. Studieren Sie für Beispiel (21), wie sich im Falle des N-Teilchen Systems von ungekoppelten harmonischen Oszillatoren im $\mathbf{R}^3$ bei verschwindenden äußeren Kräften

    (a) die kinetische Energie $K_{\vec{y}_i}$ separat zeitlich ändert,

    (b) das Potential $U_{\vec{y}_i}$ separat zeitlich ändert.

    (c) Überprüfen Sie, dass die Gesamtenergie $K_{\vec{y}_i} + U_{\vec{y}_i}$ erhalten ist.

    (d) Der Änderungsterm in (a) soll mit $S_{\vec{y}_i}$ bezeichnet werden. Berechnen Sie die zeitliche Änderung von$S_{\vec{y}_i}$ und drücken Sie diese durch $K_{\vec{y}_i}, U_{\vec{y}_i}$ und allenfalls $S_{\vec{y}_i}$ aus.

24. Zeigen Sie, dass für $0 < \varepsilon < 1$ die polare Form der Ellipsengleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

auf die Hauptachsenform

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

transformiert werden kann, wenn

$$x = r \cos \phi + e, \quad y = r \sin \phi$$

mit $e = \varepsilon\, a$, $b^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$, $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$ gesetzt wird.

25. Studieren Sie durch Einführung von Relativkoordinaten die Bewegung zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren im $\mathbf{R}^3$ analog zum Kepler Problem. Zeigen Sie, dass die Bahn $r(\phi)$ die Gestalt einer Ellipse hat.