11. Legen Sie ein geeignetes einfach zusammenhängendes Definitionsgebiet $G \subset \mathbf{R^3}$ für das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2\,x_2^2}} \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2\,x_2^2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

fest und

- untersuchen Sie, ob $\vec{F}$ auf G konservativ ist, indem Sie $rot\vec{F}$ berechnen,
- berechnen Sie ein Potential $U(\vec{x})$ mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ durch Integration von $-\int_C \vec{F}\vec{dx}$ entlang eines möglichst einfachen Weges $C \subset G$!

12. Lösen Sie die eindimensionale Newtonsche Bewegungsgleichung für die harmonische Kraft

$$F(x) = -m\,\omega^2{}_0\,x$$

mittels des Energiesatzes (!), wobei $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ vorgegeben sei.

13. Ein Teilchen mit Masse m und Energie E, wo $0 < E$, bewege sich im Potential $U(x)$

$$U(x) = \frac{1}{2}m\,\omega^2{}_0\,x^2$$

eines harmonischen Oszillators. Bestimmen Sie die Gleichgewichtsstelle und die Umkehrpunkte der Bewegung sowie - mittels des Energiesatzes - die Schwingungsdauer T des Teilchens.

14. Ein Teilchen mit Masse m und Energie E bewege sich im eindimensionalen Potential $U(x)$

$$U(x) = 3(e^{-6x} - 2e^{-3x}).$$

Bestimmen Sie die Gleichgewichtsstelle und die Umkehrpunkte der Bewegung für $E \leq -3$ sowie $-3 < E < 0$ und $E \geq 0$.

15. Ein Teilchen mit Masse m und Energie E, wo $0 < E$, bewege sich im Potential $U(x)$

$$U(x) = \frac{1}{2}m\,\omega^2{}_0\,x^2 + \lambda x^4$$

eines anharmonischen Oszillators. Bestimmen Sie - mittels des Energiesatzes - die Schwingungsdauer T des Teilchens näherungsweise für $\lambda E \ll (m\omega_0^2)^2$.
HINWEIS: Verwenden Sie die Substitution $sin^2\varphi = \frac{U(x)}{E}$ und drücken Sie x durch φ bis zur ersten Ordnung in λ aus.