

6. Berechnen Sie im \mathbf{R}^3 $\operatorname{rot} \frac{\vec{x}}{r^n}$, $\operatorname{div} \frac{\vec{x}}{r^n}$, sowie Δr^n (es sei immer $r \neq 0$).
7. Eine elektrische Ladung q_1 im Punkt \vec{x}_1 bewegt sich mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}_1$ und erzeugt dabei an einer Stelle \vec{x}_2 das Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{x}_2) = \operatorname{const} \cdot q_1 \frac{\dot{\vec{x}}_1 \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}$$

(Gesetz von Biot-Savart für das Magnetfeld einer bewegten Punktladung).

Geben Sie die Kraft \vec{F}_{21} an, die eine zweite in \vec{x}_2 mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}_2$ bewegte Ladung q_2 auf Grund des Magnetfeldes B verspürt. Verwenden Sie die Formel der Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_{21} = q_2 \dot{\vec{x}}_2 \times \vec{B}(\vec{x}_2)$$

und werten Sie das doppelte Kreuzprodukt aus. Zeigen Sie, daß im Allgemeinen $\vec{F}_{21} \neq -\vec{F}_{12}$.

8. Betrachten Sie die gegenseitig aufeinander ausgeübten Kräfte *stromdurchflossener geschlossener Leiterschleifen* C_1 und C_2 .

Das Magnetfeld \vec{B} der vom Strom I_1 durchflossenen Leiterschleife C_1 ist

$$\vec{B}(\vec{x}_2) = \operatorname{const} \cdot I_1 \int_{C_1} \frac{d\vec{x}_1 \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}.$$

Die Lorentzkraft \vec{F}_{21} , die auf die vom Strom I_2 durchflossene Leiterschleife C_2 wirkt, ist

$$\vec{F}_{21} = I_2 \int_{C_2} d\vec{x}_2 \times \vec{B}(\vec{x}_2).$$

Werten Sie das doppelte Kreuzprodukt aus. Zeigen Sie sodann, dass der das Prinzip "actio = reactio" verletzende Term ein exaktes Differential bezüglich \vec{x}_2 ist. Daher verschwindet sein Beitrag zum Linienintegral über die geschlossene Leiterschleife C_2 .

9. Untersuchen Sie auf $G = \mathbf{R}^3 \setminus \{x_3 - \text{Achse}\}$ das Vektorfeld \vec{F}

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- gilt auf G , dass $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$?
- gilt auf G , dass $\vec{F} = \vec{\nabla}(-\arctan \frac{x_1}{x_2})$ und somit \vec{F} ein konservatives Kraftfeld ist?

- berechnen Sie $\oint \vec{F} d\vec{x}$ entlang eines beliebigen Kreises um die x_3 -Achse
10. Betrachten Sie die obere Hälfte eines symmetrisch um die x_3 -Achse liegenden Torus. Bestätigen Sie den Satz von Stokes für \vec{F} des vorangegangenen Beispiels.