

## 7. SU(2) und SO(3)

### 7.1 SU(2)

$\xrightarrow{\text{speziell}}$   $\xrightarrow{\text{unitär}}$   $\xrightarrow{2 \times 2}$   $SU(2) = \text{Gruppe der (komplexen) unitären } 2 \times 2\text{-Matrizen}$   
 mit  $\det = 1$  (unimodular)

mögliche Parametrisierung:

$$U(\vec{\alpha}) := e^{-i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} = 1, \cos \frac{\alpha}{2} - i \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha \vec{n}, \vec{n}^2 = 1, \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ Pauli-Matrizen}$$

$U(\vec{\alpha})$  ist klarerweise unitär und wegen

$$\det U(\vec{\alpha}) = e^{\text{Tr}(-i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2})} = 1 \text{ auch unimodular}$$

wir wissen bereits: wegen  $U(\pi \vec{n}) U(\pi \vec{n}) = U(2\pi \vec{n}) = -1$ ,  
 ist  $U(\vec{\alpha})$  keine Darstellung der  $SO(3)$ )

→  $U(\vec{\alpha})$  bilden nur dann eine Gruppe, wenn  
 der  $SO(3)$ -Parameterbereich  $0 \leq |\vec{\alpha}| \leq \pi$  auf  
 $0 \leq |\vec{\alpha}| \leq 2\pi$  erweitert wird → Drehungen

werden doppelt überdeckt:  $U(-(2\pi - \alpha) \vec{n}) = -U(\vec{\alpha} \vec{n})$   
 bei den  $SU(2)$  keine Identifizierung  $R(\pi \vec{n}) = R(-\pi \vec{n})$   
 (wie bei der  $SO(3)$ ), sondern  $U(-\pi \vec{n}) = -U(\pi \vec{n})$

Bem.: Ähnliche Situation wie in der Komplexen Analysis  
 $w = z^{1/2}$  ist nur eine Funktion auf einer Riemannschen

Fläche, welche die komplexe Ebene doppelt überdeckt.

analog  $\rightarrow$  SU(2) ist die universelle Überlagerungsgruppe der SO(3)

SU(2) als (differenzierbare) Mannigfaltigkeit:

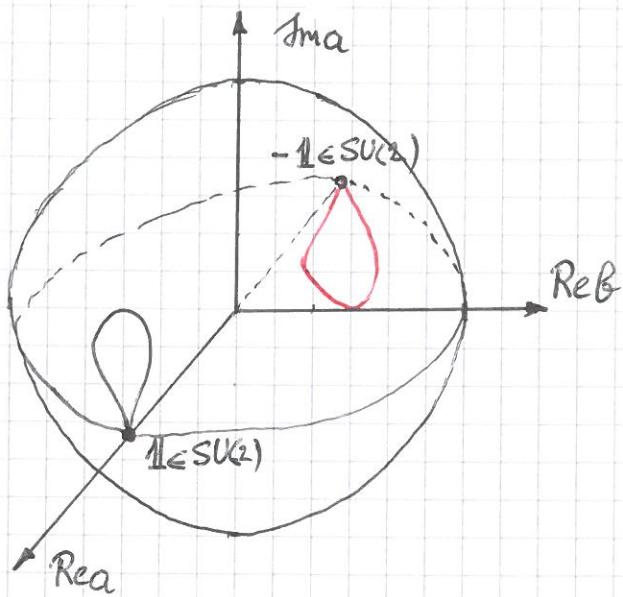
$$0 \leq |\vec{\alpha}| \leq 2\pi \rightarrow U(\vec{\alpha}) \text{ durchläuft } \text{SU}(2)$$

schreibe  $U \in \text{SU}(2)$  in der Form

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

$$(\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2 + (\operatorname{Re} b)^2 + (\operatorname{Im} b)^2 = 1$$

$$\rightarrow \text{SU}(2) = S^3 \quad (S^3 \text{ ist die Einheitssphäre des } \mathbb{R}^4)$$



$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \operatorname{Re} a = 1, \quad \operatorname{Re} b = \operatorname{Im} b = \operatorname{Im} a = 0$$

SU(2) ist einfach zusammenhängend

SO(3) ist zweifach zusammenhängend (entspricht  $S^3$  mit identifizierten Gegenpunkten!)

## 7.2 Zusammenhang zwischen $SO(3)$ und $SU(2)$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \implies X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

$$X^\dagger = X, \quad \text{Tr } X = 0$$

umgekehrt:

hermit., sparlose Matrix  $X$  gegeben  $\rightarrow \vec{x} = \frac{1}{2} \text{Tr}(X\vec{\sigma})$

$$X^2 = \vec{x}^2 \mathbb{1}_2, \quad \det X = -\vec{x}^2$$

$U \in SU(2) \Rightarrow X' = UXU^\dagger$  ebenfalls hermit. und  
spurlos

d.h. die Abbildung  $X \rightarrow UXU^\dagger = X'$  definiert  
eine lineare Transformation  $\vec{x} \rightarrow R\vec{x}$

$$\vec{x} = \frac{1}{2} \text{Tr}(X\vec{\sigma}) \rightarrow \vec{x}' = \frac{1}{2} \text{Tr}(X'\vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(UXU^\dagger\vec{\sigma})$$

$$\vec{x}'^2 \mathbb{1}_2 = X'^2 = UXU^\dagger UXU^\dagger = UX^2 U^\dagger = \vec{x}^2 \mathbb{1}_2$$

oder:

$$-\vec{x}'^2 = \det X' = \det UXU^\dagger = \det X = -\vec{x}^2$$

$\Rightarrow$  die Transformation  $R$  ist orthogonal

$U = \mathbb{1}_2 \rightarrow R = \mathbb{1}_3, SU(2) \text{ zusammenhängend} \Rightarrow R \in SO(3)$

$$x'_i = R_{ij} x_j = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(U \times U^\dagger \sigma_i) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_i U \tilde{\sigma}_j x_j U^\dagger)$$

$$\Rightarrow R_{ij} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_i U \tilde{\sigma}_j U^\dagger)$$

Bemerkung:  $U(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_i U(\vec{\alpha}) \tilde{\sigma}_j U^\dagger(\vec{\alpha})) = (R(\vec{\alpha}))_{ij} \quad (\text{UE})$$

Die Abbildung  $\phi: SU(2) \rightarrow SO(3)$

$$U \mapsto R_U$$

mit  $(R_U)_{ij} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_i U \tilde{\sigma}_j U^\dagger)$  ist surjektiv,

d.h.  $\phi(SU(2)) = SO(3)$

$\phi$  ist ein Gruppenhomomorphismus, d.h.  $\phi(U_1 U_2) = \phi(U_1) \phi(U_2)$    
 (UE)

mit dem Kern

$$\ker \phi := \{U \in SU(2) \mid \phi(U) = \mathbb{1}_3 \in SO(3)\} = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\}$$

Beweis: Ang.  $\phi(U) = \mathbb{1}_3$ , d.h.  $U \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U^\dagger = \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow [U, \vec{x} \cdot \vec{\sigma}] = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow [U, A] = 0 \quad \forall \text{ komplexen}$$

$$2 \times 2 \text{-Matrizen } A \Rightarrow U = c \mathbb{1}_2 \stackrel{U \in SU(2)}{\Rightarrow} U = \pm \mathbb{1}_2$$

Beh.:  $\forall R(\vec{\alpha}) \in SO(3) \exists! \underline{\text{zwei}}$  Elemente von  $SU(2)$

mit  $\phi(U) = R(\vec{\alpha})$ , nämlich  $U = \pm U(\vec{\alpha})$

$$\underline{\text{Bew.}}: U \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U^\dagger = \underbrace{(R(\vec{\alpha})\vec{x}) \cdot \vec{\sigma}}_{=: \vec{x}'}$$

Ansatz:  $U = U_1 U(\vec{\alpha})$

$$\Rightarrow U_1 \vec{x}' \cdot \vec{\sigma} U_1^\dagger = \vec{x}' \cdot \vec{\sigma} \quad \forall \vec{x}' \Rightarrow U_1 = \pm \mathbb{1}_2$$

$$\Rightarrow U = \pm U(\vec{\alpha}) \checkmark$$

$$\{U(\vec{\alpha}), -U(\vec{\alpha})\} \leftrightarrow R(\vec{\alpha})$$

$$SU(2)/\{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} = SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$$

Faktorgruppe (Quotientengruppe)  $SU(2) \text{ mod (ulo) } \mathbb{Z}_2$

Erklärung der Notation:

geg. Gruppe  $G$  mit Untergruppe  $H$

$gH := \{gh \mid h \in H\}$  linke Nebenklasse (coset) von  $H$

$Hg =$  rechte Nebenklasse

Zerlegung von  $G$  in (linke) Nebenklassen bezüglich der Untergruppe  $H$ :

$\cdot e$	$\cdot g_1$	$\cdot g_2$	$\cdot g_3$		
$eH = H$	$g_1H$	$g_2H$	$g_3H$	usw.	

$g_1 \notin H$   
 $g_2 \in H \cup g_1H$

$g_iH = \text{Nebenklasse}$

$G = H \cup g_1H \cup g_2H \cup \dots$  dijunkte Vereinigung.

$g_iH \cap g_jH = \emptyset$  für  $i \neq j$

$G/H = \{H, g_1H, g_2H, \dots\}$  Menge aller (linken) Nebenklassen

„ $G$  modulo  $H$ “

Falls  $gH = Hg \quad \forall g \in G$  (linke Nebenklassen =

= rechte Nebenklassen) heißt  $H$  Normalteiler

oder invariante Untergruppe. An diesem Fall

ist  $G/H$  ebenfalls eine Gruppe (Faktor- oder

Quotientengruppe) mit der Gruppenmultiplikation

$(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$  (diese Definition ist

unabhängig von der Wahl der Repräsentanten  $(g_i)$ )

Einheitselement:  $eH = H$

zu  $gH$  inverses Element:  $g^{-1}H$

im Fall von  $SU(2)$ :

$G = SU(2)$ ,  $H = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\}$  ist eine invariante Untergruppe der  $SU(2)$  weil

$$\underset{U \in G}{\cup} H = \cup \{1, -1\} = \{U, -U\} = \{1, -1\} \cup$$

$$G/H = SU(2) / \underbrace{\{1, -1\}}_{\cong \mathbb{Z}_2} = \{(U, -U) \mid U \in SU(2)\} = SO(3)$$

Bemerkung:  $U \in SU(2)$  kann man aus  $R \in SO(3)$  folgendermaßen erhalten:

$$U = \pm \frac{1 + R_{ij} \sigma_i \sigma_j}{2 \sqrt{1 + \text{tr } R}}$$

Spinoren sind die Elemente des zweidimensionalen Darstellungsraumes der (definierenden Darstellung der)  $SU(2)$

$$X \in \mathbb{C}^2$$

$\underbrace{X^\dagger}_{\vec{S}} \underbrace{\frac{i}{2} \vec{\sigma}}_{\vec{S}} X =$  Erwartungswert von  $\vec{S}$  in dem durch den Spin  $X$  beschriebenen Zustand

$$(U(\vec{x})X)^\dagger \vec{S} U(\vec{x}) X = X^\dagger \underbrace{U(\vec{x})^\dagger \vec{S} U(\vec{x})}_{R(\vec{x}) \vec{S}} X = R(\vec{x}) X^\dagger \vec{S} X$$

### 7.3 Darstellungen der SU(2)

Allgemein gilt für Kompakte Liegruppen:

1. Jede (stetige) Darstellung einer kompakten Liegruppe in einem Hilbertraum ist äquivalent zu einer unitären Darstellung
2. Jede (stetige) irreduzible Darstellung einer kompakten Liegruppe in einem Hilbertraum ist endlichdimensional.  
Jede (stetige) unitäre Darstellung einer kompakten Liegruppe ist eine direkte orthogonale Summe von irreduziblen (und daher endlichdimensionalen) Unterdarstellungen.

Da SU(2) eine kompakte Liegruppe ist, kann man sich bei der Klassifizierung ihrer Darstellungen auf unitäre Darstellungen

$$U(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \mapsto e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}}$$

mit Hermitischen  $T_1, T_2, T_3$  und Vertauschungsrelationen

$$[T_R, T_\ell] = i \varepsilon_{R\ell m} T_m,$$

weil  $\vec{\sigma}/2$  die Vertauschungsrelationen

$$\left[ \frac{\sigma_R}{2}, \frac{\sigma_\ell}{2} \right] = i \varepsilon_{R\ell m} \frac{\sigma_m}{2}$$

erfüllt.  $\rightarrow T_1, T_2, T_3$  bilden Basis für Darstellung

der Liealgebra  $\text{su}(2)$ . Die Klassifizierung der irreduziblen Darstellungen der  $\text{su}(2)$  wurde aber in T2 durchgeführt! Wir haben es hier ja mit der Drehimpulsalgebra ( $J_R = \tau_i T_R$ ) zu tun!

Der Casimir-Operator  $\vec{T}^2$  vertauscht wegen obiger Kommutatorrelation mit allen Komponenten von  $\vec{T}$   $\Rightarrow \vec{T}^2 = \lambda \mathbb{1}$  in einer irreduziblen Darstellung. Die möglichen Eigenwerte von  $\vec{T}^2$  dienen zur Klassifizierung der irreduziblen Darstellungen der  $\text{su}(2)$ .

$$T_{\pm} := T_1 \pm i T_2 = T_{\mp}^{\dagger}, \quad T_3$$

$$[T_+, T_-] = 2 T_3, \quad [T_3, T_{\pm}] = \pm T_{\pm}$$

$$\vec{T}^2 = T_{\pm} T_{\mp} + T_3^2$$

$$\Rightarrow \lambda = j(j+1) \quad \text{mit möglichen Werten von } j: 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$\rightarrow 2j+1$ -dim. irred. Darstellung  $D^{(j)}$

Basis des Darstellungsraums:

$$|j\rangle, |j-1\rangle, \dots, |-j\rangle \quad (\text{normiert})$$

$$T_+ |j\rangle = 0, \quad T_- |-j\rangle = 0$$

$$T_- |m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)} |m-1\rangle$$

$$T_+ |m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m+1)} |m+1\rangle$$

wir wissen ebenfalls:  $e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}}$  ist eine Darstellung der  $SU(2)$  für  $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  aber nicht der  $SO(3)$  (in diesem Fall nur Darst „bis auf eine Phase“)

#### 7.4 Clebsch - Gordan - Zerlegung (Addition von Drehimpulsen)

Ebenfalls aus T2 bekannt ist die Zerlegung eines Produkts zweier irreduz. Darst. der  $SU(2)$ :

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{(j_1 + j_2)} \oplus D^{(j_1 + j_2 - 1)} \oplus \dots \oplus D^{(|j_1 - j_2|)}$$

Beispiel: Tensor vom Rang 2 (Produkt zweier Darst. mit  $j=1$ )

$$T_{ij} \xrightarrow{R \in SO(3)} R_{ik} R_{jl} T_{kl}$$

Was sind die irreduziblen Unterräume?

$$D^{(1)} \otimes D^{(1)} = D^{(2)} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(0)}$$

$$\begin{array}{ccc} | & | & \backslash \\ 5\text{-dim.} & 3\text{-dim.} & 1\text{-dim.} \end{array}$$

$$\overline{\text{Tr } T} = \overline{T_{ii}} \xrightarrow{SO(3)} \underbrace{R_{ik} R_{il} T_{kl}}_{(R^T R)_{kl}} = \overline{\text{Tr } T} \text{ inv.} \rightarrow D^{(0)}$$

antisymmetrischer Tensor:  $T_{ij} = -T_{ji}$  ebenfalls inv. unter  $SO(3)$

$$\begin{aligned} T_{ij} \rightarrow R_{ik} R_{jl} \overline{T_{kl}} &= -R_{ik} R_{jl} T_{lk} = \\ &= -R_{jl} R_{ik} T_{lk} \rightarrow D^{(1)} \end{aligned}$$

spurloser, symmetrischer Tensor:  $T_{ij} = T_{ji}$ ,  $\text{Tr } T = 0$

$6 - 1 = 5$ -dim. irreduz. Darst.

Zerlegung eines allg. Tensors vom Rang 2 in irreduzible Bestandteile:

$$T_{ij} = \frac{1}{3} \text{Tr } T \delta_{ij}$$

$$+ \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji})$$

$$+ \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3} \text{Tr } T \delta_{ij}$$

Beispiel:  $D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(1)} \oplus D^{(0)}$

Wähle als Basis des zweidimensionalen Darstellungsraumes von  $D^{(1/2)}$  die Spinoren  $X_{\pm} \in \mathbb{C}^2$  mit  $\sigma_3 X_{\pm} = \pm X_{\pm}$

$$\text{Normierung} \rightarrow X_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der eindimensionale invariante Unterraum in der Zerlegung

$D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(1)} \oplus D^{(0)}$ , der zur trivialen Darstellung  $D^{(0)}$  gehört, wird von

$$(X_+ \otimes X_- - X_- \otimes X_+) / \sqrt{2}$$

(Singlett) aufgespannt (antisymmetrischer Teil des Tensorprodukts  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ )

7/12

Der zu  $D^{(1)}$  gehörende dreidimensionale invariante Teilraum wird von

$$\chi_+ \otimes \chi_+$$

$$(\chi_+ \otimes \chi_- + \chi_- \otimes \chi_+) / \sqrt{2}$$

$$\chi_- \otimes \chi_-$$

aufgespannt (Triplet). (Symmetrischer Teil des Tensorprodukts  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ )

Verallgemeinerung:

$$\underbrace{D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} \otimes \dots \otimes D^{(1/2)}}_{p \text{ Faktoren}} = D^{(p/2)} \oplus \dots$$

$$(\text{Bsp.: } D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(3/2)} \oplus D^{(1/2)} \oplus D^{(1/2)})$$

Bem.: Der zu  $D^{(p/2)}$  gehörende invariante Unterraum ist der total symmetrische Anteil des p-fachen Tensorprodukts von  $\mathbb{C}^2$ ,

$$\underset{s}{\mathbb{C}^2} \otimes \underset{s}{\mathbb{C}^2} \otimes \dots \otimes \underset{s}{\mathbb{C}^2},$$

aufgespannt durch:

$$\chi_+ \otimes \chi_+ \otimes \dots \otimes \chi_+$$

$$(\chi_- \otimes \chi_+ \otimes \dots \otimes \chi_+ + \chi_+ \otimes \chi_- \otimes \chi_+ \otimes \dots \otimes \chi_+ + \dots + \chi_+ \otimes \chi_+ \otimes \dots \otimes \chi_-) / \overline{1p}$$

⋮

$$\chi_- \otimes \chi_- \otimes \dots \otimes \chi_-$$

→  $p+1$  Terme

$$\text{tatsächlich: } 2\left(\frac{p}{2}\right) + 1 = p+1.$$

### 7.5 Clebsch-Gordan-Koeffizienten ( $\rightarrow T2$ )

Gegeben seien die irreduziblen Darstellungen  $D^{(j_1)}$  und  $D^{(j_2)}$

mit der Clebsch-Gordan-Zerlegung der Produkt-

$$\text{darstellung } D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} \oplus \dots \oplus D^{(|j_1-j_2|)}$$

Basis des Darstellungsraumes von  $D^{(j_a)}$ :

$$|j_a, m_a\rangle, \quad m_a = -j_a, \dots, +j_a$$

$$\text{mit } \vec{T}^{(a)2} |j_a, m_a\rangle = j_a(j_a+1) |j_a, m_a\rangle$$

$$T_3^{(a)} |j_a, m_a\rangle = m_a |j_a, m_a\rangle$$

→ gemeinsame Basis von Eigenvektoren von

$$\vec{T}^{(1)2}, T_3^{(1)}, \vec{T}^{(2)2}, T_3^{(2)}:$$

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

$(2j_1+1)(2j_2+1)$ -dimensional

$$\vec{T} := \vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}$$

Generatoren der Produktdarst.

(Gesamtdrehimpuls)

Basis von gemeinsamen Eigenvektoren von  $\vec{T}^2$  und  $T_3$

wird mit  $|j, m\rangle$  bezeichnet:

$$\vec{T}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle$$

$$T_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle$$

mögliche Werte von  $j$ :  $j_1+j_2, j_1+j_2-1, \dots, |j_1-j_2|$

$m = -j, -j+1, \dots, j$

Negen  $\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$

natürlich ebenfalls  $(2j_1+1)(2j_2+1)$ -dimensional

Zusammenhang zwischen den beiden Basisyskemen:

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \underbrace{\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m\rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeff.}}$$

$$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |j, m_1+m_2\rangle \underbrace{\langle j, m_1+m_2 | j_1, m_1; j_2, m_2\rangle}_{}$$

In diesen Formeln wurde verwendet, dass  $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m\rangle$  verschwindet, falls  $m_1+m_2 \neq m$  ist, denn einerseits gilt

$$T_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle$$

und andererseits

$$\underbrace{(T_3^{(1)} + T_3^{(2)})}_{T_3} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = (m_1+m_2) |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle.$$

Zur Berechnung der (reell wählbaren) Clebsch-Gordan-Koeffizienten beginnt man mit den größten Eigenwerten  $j = j_1 + j_2$ ,  $m = j_1 + j_2$ :

$$|j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle \quad (\text{eindeutig bis auf Phasenwahl})$$

Im nächsten Schritt wendet man die Formel

7/16

$$T_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$$

auf obigen Vektor an:

$$\text{LS: } T_- |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = \sqrt{2(j_1 + j_2)} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$$

$$\text{RS: } \underbrace{(T_-^{(1)} + T_-^{(2)})}_{T_-} |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle = \sqrt{2j_1} |j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle + \sqrt{2j_2} |j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle$$

$$\Rightarrow |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle$$

Damit sind bereits zwei Clebsch-Gordan-Koeffizienten bestimmt:

$$\langle j_1, j_1 - 1; j_2, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 \rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}$$

$$\langle j_1, j_1; j_2, j_2 - 1 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 \rangle = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}$$

Der Operator  $T_-$  wird nun weiter angewendet, bis man schließlich bei  $|j_1 + j_2, -(j_1 + j_2)\rangle$

angelangt ist und der Darstellungsräum von  $D^{(j_1+j_2)}$  vollständig konstruiert ist. Auf diese Weise erhält man auch alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten vom Typ  $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_1+j_2, m \rangle$ ,  $m = j_1+j_2, \dots, -(j_1+j_2)$ .

Um in den Darstellungsräum von  $D^{(j_1+j_2-1)}$  zu gelangen, bemerkt man, dass der Vektor  $|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle$  eine Linearkombination von  $|j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle$  und  $|j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle$  sein muss, welche auf  $|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$  normal steht:

$$\begin{aligned} |j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle &= \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} |j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle \\ &\quad - \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} |j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung von  $T_-$  gelangt man schließlich zu  $|j_1+j_2-1, -(j_1+j_2-1)\rangle$ , wodurch der Darstellungsräum von  $D^{(j_1+j_2-1)}$  und die dazugeh. Clebsch-Gordan-Koeff. gewonnen werden. Usw...

Am Ende hat man dann alle irreduziblen Unterräume der Produktdarstellung  $D^{G_1} \otimes D^{G_2}$  erhalten.

Bemerkung: Tabellen einiger Clebsch-Gordan-Koeffizienten finden Sie auf der Internetseite pdg.lbl.gov unter Reviews → Mathematical Tools → Clebsch-Gordan coeff.,...

## 7.6 Irreducibile Tensoren

Die Kartesischen Komponenten eines Vektors transformieren bei einer Drehung gemäß

$$x'_k = R_{kl} x_l, \quad R \in SO(3).$$

Die  $SO(3)$ -Matrizen  $R$  entsprechen dabei der irreduziblen Darstellung mit Gewicht  $j=1$ . Man kann  $R$  auch als lineare Abbildung  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  auffassen und dann

$$R(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{t}}$$

schreiben, wobei sich aus  $R(\vec{\alpha})_{kl} \simeq S_{kl} - \epsilon_{klm} \alpha_m$

$$(t_m)_{kl} = -i \epsilon_{mlk}$$

ergibt. Die drei  $3 \times 3$ -Matrizen  $t_1, t_2, t_3$  bilden eine Basis der sog. adjungierten Darstellung der  $su(2)$ .

Adjungierte Darstellung: Darstellungsmatrizen der Erzeuger gebildet aus den Strukturkonstanten der Liealgebra ( $\epsilon_{klm}$  im Fall der  $su(2)$ ).

UE: Überprüfen Sie  $[t_R, t_L] = i \epsilon_{\text{Riem}} t_m$

Explizite Form der  $t_m$ :

$$t_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eigenwerte } \pm 1, 0 \quad \checkmark$$

$$t_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad t_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow t_+ = t_1 + i t_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$t_- = t_1 - i t_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{bmatrix} = t_+^\dagger$$

Den Darstellungsvektor  $|1,1\rangle$  erhalte ich durch die Bedingung  $t_+ |1,1\rangle = 0$

$$\Rightarrow |1,1\rangle \sim \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phasenkonvention:  $|1,1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + i \vec{e}_2)$

$$t_- |1,1\rangle = \sqrt{2} |1,0\rangle$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \sqrt{2} |1,0\rangle$$

$$\Rightarrow |1,0\rangle = \vec{e}_3$$

$$t_- |1,0\rangle = \sqrt{2} |1,-1\rangle$$

$$\Rightarrow |1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)$$

Man erhält also

$$|1,1\rangle = -\frac{\vec{e}_1 + i\vec{e}_2}{\sqrt{2}}, \quad |1,0\rangle = \vec{e}_3, \quad |1,-1\rangle = \frac{\vec{e}_1 - i\vec{e}_2}{\sqrt{2}},$$

bzw. die Umkehrtransformation

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,-1\rangle - |1,1\rangle)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (|1,-1\rangle + |1,1\rangle)$$

$$\vec{e}_3 = |1,0\rangle$$

Man definiert die sphärischen Komponenten eines Vektors  $\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \vec{e}_i$  durch

$$A_1^{(1)} = -\frac{A_1 + iA_2}{\sqrt{2}}, \quad A_0^{(1)} = A_3, \quad A_{-1}^{(1)} = \frac{A_1 - iA_2}{\sqrt{2}}$$

Die Zerlegung des Vektors  $\vec{A}$  bezüglich der Basis  $|1, m\rangle$   
lautet daher:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 = \\
 &= \frac{A_1}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle - |1, 1\rangle) + \frac{i A_2}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle + |1, 1\rangle) + A_3 |1, 0\rangle \\
 &= \underbrace{\frac{A_1 + i A_2}{\sqrt{2}}}_{-A_1^{(1)}} |1, -1\rangle - \underbrace{\frac{A_1 - i A_2}{\sqrt{2}}}_{A_{-1}^{(1)}} |1, 1\rangle + A_3 |1, 0\rangle \\
 &= \sum_{m=-1}^{+1} (-1)^m A_{-m}^{(1)} |1, m\rangle
 \end{aligned}$$

Skalarprodukt von zwei (reellen) Vektoren  $\vec{A}, \vec{B}$ :

$$\begin{aligned}
 \vec{B}^T = \vec{B}^+ &= \sum_{m=-1}^{+1} (-1)^m \underbrace{B_{-m}^{(1)}}_{(-1)^m B_m^{(1)}} * \langle 1, m | = \sum_{m=-1}^{+1} B_m^{(1)} \langle 1, m | \\
 \Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{A} &= \sum_{m=-1}^{+1} B_m^{(1)} \langle 1, m' | \sum_{m=-1}^{+1} \langle 1, m' | \sum_{m=-1}^{+1} (-1)^m A_{-m}^{(1)} |1, m\rangle \\
 &= \sum_{m=-1}^{+1} B_m^{(1)} A_{-m}^{(1)} (-1)^m
 \end{aligned}$$

Zusammenhang mit den Kugelfunktionen  $Y_{1m}(\vec{x})$

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta (\cos\phi + i \sin\phi) \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r} (-1) \frac{x_1 + i x_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x_1 + i x_2}{r}
 \end{aligned}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x_3}{r} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x_0^{(1)}}{r}$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r} \frac{x_1 - ix_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x_{-1}^{(1)}}{r}$$

$$\Rightarrow Y_{1m} \left( \frac{\vec{x}}{r} \right) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x_m^{(1)}}{r}$$

allgemein:  $Y_{lm}(\vec{A}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} A_m^{(l)}$

↑  
bel. Vektor

Veralgemeinerung:  $Y_{lm}(\vec{A}) =: T_m^{(l)}$  bilden die  $2l+1$  sphärischen Komponenten eines irreduziblen Tensors vom Typ  $l$ .

Irreduzibilität → Vorteil gegenüber kartesischen Tensorkomponenten

Beispiel:

$$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{1}{r^2} (x_1 + ix_2)^2 = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{r^2} \left( -\frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{r^2} x_3 (x_1 + ix_2) = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \frac{1}{r^2} \left( -\frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2}} \right) x_3$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{1}{r^2} (3x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{1}{r^2} [2x_3^2 - (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)]$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{r^2} \left( x_3^2 + \left( -\frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{x_1 - ix_2}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{r^2} \times_3 (x_1 - i x_2)$$

$$= \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \frac{1}{r^2} \frac{x_1 - i x_2}{\sqrt{2}} \times_3$$

$$Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{-2i\phi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{1}{r^2} (x_1 - i x_2)^2 = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{r^2} \left( \frac{x_1 - i x_2}{\sqrt{2}} \right)^2$$

### Transformationsverhalten unter Drehungen

$$Y_{lm}(\vec{n}) = \langle \vec{n} | l, m \rangle \in L^2(S^2)$$

Einheitsvektor  $\vec{n}$  beschreibt Punkte der  $S^2$

$$\text{Darstellung der } SO(3): \underbrace{R(\vec{\alpha})}_{\in SO(3)} \mapsto \underbrace{U(R(\vec{\alpha}))}_{\text{unitär}} = U(\vec{\alpha})$$

$$U(\vec{\alpha}) |\vec{n}\rangle = |R(\vec{\alpha})\vec{n}\rangle$$

$$\langle \vec{n} | U(\vec{\alpha}) | l, m \rangle = \langle R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{n} | l, m \rangle = Y_{lm}(R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{n})$$

ii) andererseits

$$\sum_{l',m'} \langle \vec{n} | l', m' \rangle \underbrace{\langle l', m' | U(\vec{\alpha}) | l, m \rangle}_{\delta_{ll'} D_{m'm}^{(l)}(\vec{\alpha})} = \sum_{m'} Y_{lm'}(\vec{n}) D_{m'm}^{(l)}(R(\vec{\alpha}))$$

$$\text{d.h. } \langle \vec{n} | U(\vec{\alpha}) | l, m \rangle = Y_{lm}(R(\vec{\alpha})\vec{n}) = \sum_{m'} Y_{lm'}(\vec{n}) D_{m'm}^{(l)}(R(\vec{\alpha}))$$

$$\text{bzw. } \langle \vec{n} | \underbrace{U(\vec{\alpha})^\dagger}_{= U(\vec{\alpha})^{-1}} | l, m \rangle = Y_{lm}(R(\vec{\alpha})\vec{n}) = \sum_{m'} Y_{lm'}(\vec{n}) D_{m'm}^{(l)}(R(\vec{\alpha}))$$

$$= \sum_{m'} Y_{lm'}(\vec{n}) D_{m'm}^{(l)}(R(\vec{\alpha}))^*$$

Vektoroperator  $\vec{V}$ :  $U(R)^T V_R U(R) = R_{R\vec{v}} V_i$

Beispiele:  $\vec{X}, \vec{P}, \vec{L}$

Sphärischer Tensoroperator  $T_m^{(l)}$ :

Prototyp:  $T_m^{(l)} = Y_{lm}(\vec{V})$

$$U(R)^T Y_{lm}(\vec{V}) U(R) = Y_{lm}(R\vec{V}) = \sum_{m'} Y_{lm'}(\vec{V}) D_{mm'}^{(l)}(R)^*$$

$$\rightarrow U(R)^T T_m^{(l)} U(R) = \sum_{m'} T_{m'}^{(l)} D_{mm'}^{(l)}(R)^*$$

$$\text{bzw. } U(R) T_m^{(l)} U(R)^T = \sum_{m'} T_{m'}^{(l)} D_{m'm}^{(l)}(R)$$

Allgemein definiert man einen irreduziblen Tensoroperator  $T_m^{(j)}$

durch das Transformationsverhalten

$$U(A) T_m^{(j)} U(A)^T = \sum_{m'} T_{m'}^{(j)} D_{m'm}^{(j)}(A) \quad \forall A \in SU(2)$$

bzw.

$$e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{J}/\hbar} T_m^{(j)} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{J}/\hbar} = \sum_{m'} T_{m'}^{(j)} D_{m'm}^{(j)}(\vec{\alpha})$$

Daraus folgen (mit infinitesimalem  $\vec{\alpha}$ ) die Vertauschungsrelationen:

$$[J_3, T_m^{(j)}] = \hbar m T_m^{(j)}$$

$$[J_+, T_m^{(j)}] = \hbar \sqrt{j(j+1)-m(m+1)} T_{m+1}^{(j)}$$

$$[J_-, T_m^{(j)}] = \hbar \sqrt{j(j+1)-m(m-1)} T_{m-1}^{(j)}$$

## 7.7 Wigner-Eckart-Theorem

Seien  $T_m^{(j)}$  ( $m = -j, \dots, j$ ) die Komponenten eines irreduziblen Tensoroperators der Stufe  $j$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit einer unitären Darstellung  $U$  von  $SU(2)$ . Sei  $|\alpha, j, m\rangle$  ein vollständiges Orthonormalsystem von  $\mathcal{H}$  mit

$$\vec{J}^2 |\alpha, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |\alpha, j, m\rangle,$$

$$J_3 |\alpha, j, m\rangle = \hbar m |\alpha, j, m\rangle$$

(der Index  $\alpha$  berücksichtigt die Vielfachheit der irreduziblen Darstellung  $D^{(j)}$ ).

Dann gibt es für alle  $\alpha_1, j_1, \alpha_2, j_2$  Zahlen, die unabhängig von  $m_1, m_2, m$  sind und mit

$$\langle \alpha_1, j_1 || T^{(j)} || \alpha_2, j_2 \rangle$$

bezeichnet werden (sog. reduzierte Matrixelemente), sodass

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_1, j_1, m_1 | T_m^{(j)} | \alpha_2, j_2, m_2 \rangle = \\ &= \langle \alpha_1, j_1 || T^{(j)} || \alpha_2, j_2 \rangle \underbrace{\langle j_1, m_1 | j, m; j_2, m_2 \rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeffizient}} \end{aligned}$$

Bemerkung: Das Wigner-Eckart-Theorem impliziert insbes. Auswahlregeln: Rechte Seite = 0, außer wenn  $m_1 = m + m_2$ ,  $|j - j_2| \leq j_1 \leq j + j_2$

Ebenso kann man die relative Stärke der Matrixelemente zu verschiedenen  $m, m_1, m_2$  aus der obigen Formel ablesen.

Zum Beweis des Wigner - Eckart - Theorems verwenden wir das Schursche Lemma:

Sei  $D$  eine (unitäre) irreduzible Darstellung einer Gruppe  $G$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Falls  $C$  ein linearer Operator auf  $\mathcal{H}$  ist mit

$$[C, D(g)] = 0 \quad \forall g \in G,$$

dann ist  $C = c \mathbb{1}$  mit  $c \in \mathbb{C}$ .

Beweis: Ich beschränke mich auf den Fall eines endlichdim.

Raumes  $\mathcal{H}$ . Da  $\mathcal{H}$  ein komplexer Vektorraum ist, besitzt  $C$  mindestens einen Eigenwert  $c \in \mathbb{C}$  mit einem dazugehörigen Eigenvektor  $\varphi \neq 0$ :  $C\varphi = c\varphi$ . Dann sind aber auch alle Vektoren  $D(g)\varphi$  ( $g \in G$ ) Eigenvektoren von  $C$ :

$$CD(g)\varphi = D(g)\underbrace{C\varphi}_{c\varphi} = cD(g)\varphi$$

d.h. Vektoren des von  $\{D(g)\varphi \mid g \in G\}$  erzeugten linearen Teilspace von  $\mathcal{H}$  sind ebenfalls Eigenvektoren von  $C$  zum Eigenwert  $c$ . Es handelt sich dabei aber um einen invarianten Teilspace und wegen der Irreduzibilität von  $D$  ist dies der ganze Raum  $\mathcal{H}$ .

Korollar: Sei  $D = \bigoplus_{i=1}^n D_i$  eine unitäre Darstellung der  $SU(2)$  auf  $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^n$  mit irreduziblen Darstellungen  $D_i$  auf  $\mathcal{V}_i$ , die alle voneinander verschieden sind (d. h.  $D_i \cong D^{(j_i)}$ ,  $j_i \neq j_k$  für  $i \neq k$ ). Falls  $F$  ein Operator  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_1$  mit  $FD(A) = D_1(A)F \quad \forall A \in SU(2)$  ist, so gilt  $F = cE_1$  mit  $c \in \mathbb{C}$  und dem Projektator  $E_1: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_1$ .

Beweis:  $FD(A) = D_1(A)F \Leftrightarrow F e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}} = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}_{(1)}} F$

( $\vec{T}$  sind die Erzeuger von  $D$  und  $\vec{T}_{(1)}$  jene von  $D_1$ )

$$\Rightarrow F \vec{T} = \vec{T}_{(1)} F \Rightarrow F \vec{T}^2 = \vec{T}_{(1)}^2 F$$

Sei  $\psi \in \mathcal{V}_i$ ,  $i \geq 2$  also  $\psi \perp \mathcal{V}_1$ . Dann ist

$$\vec{T}^2 \psi = j(j+1) \psi, \quad j \neq j_1$$

also:

$$F \vec{T}^2 \psi = j(j+1) F \psi \quad \left. \begin{array}{l} \\ \parallel \end{array} \right\} \begin{array}{l} j \neq j_1 \\ \Rightarrow F \psi = 0 \end{array}$$

$$\vec{T}_{(1)}^2 F \psi = j_1(j_1+1) F \psi$$

$$\Rightarrow F = F \underbrace{(E_1 + E_1^\perp)}_{1_{\mathcal{V}}} = F E_1 = E_1 F E_1$$

Damit gilt auch:

$$\begin{aligned} D_1(A) F E_1 &= F D(A) E_1 = F E_1 \underbrace{D(A) E_1}_{D_1(A)} \\ &= F E_1 D_1(A) \quad \forall A \in SU(2) \\ \xrightarrow{\text{Scher}} \quad F E_1 &= F = c E_1, \quad c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Beweis des Wigner-Eckart-Theorems:

Betrachte die Darstellung

$$D = D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \bigoplus_{j_1=|j-j_2|}^{j+j_2} D^{(j_1)}$$

auf  $\Gamma = \bigoplus_{j_1=|j-j_2|}^{j+j_2} \Gamma^{(j_1)}$ . Eine mögliche Orthonormalbasis

von  $\Gamma$  ist  $\{|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\}$ , eine andere

$\{|j_1, m_1\rangle\}$  mit  $|j-j_2| \leq j_1 \leq j+j_2, -j_1 \leq m_1 \leq j_1$ .

Mit Hilfe letzterer kann man die Vollständigkeits-

relation in der Form

$$1\Gamma = \sum_{j_1=|j-j_2|}^{j+j_2} \underbrace{\sum_{m_1=-j_1}^{+j_1} |j_1, m_1\rangle \langle j_1, m_1|}_{E^{(j_1)} \leftarrow \text{Projektor auf } \Gamma^{(j_1)}}$$

schreiben.

Ich betrachte nun ein festes  $j_1$  mit dem dazugehörigen irreduz. Raum  $\Gamma_j := \Gamma^{(j_1)}$  und Projektator  $E_j := E^{(j_1)}$ :

$$\begin{aligned}
 E_j &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |j_1, m_1\rangle \langle j_1, m_1| = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |j_1, m_1\rangle \langle j_1, m_1| \mathbb{1}_\Gamma \\
 &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |j_1, m_1\rangle \langle j_1, m_1| \sum_{m_2} |j, m; j_2, m_2\rangle \langle j, m; j_2, m_2| \\
 &= \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1\rangle \underbrace{\langle j_1, m_1 | j, m; j_2, m_2 \rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeff.}} \langle j, m; j_2, m_2|
 \end{aligned}$$

Wir definieren jetzt:

$$F := \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1\rangle \langle \alpha_1, j_1, m_1 | T_m^{(j)} | \alpha_2, j_2, m_2 \rangle \langle j, m; j_2, m_2|$$

Dieser Operator erfüllt  $F D(A) = D_{j_1}(A) F$   
 $\forall A \in SU(2)$  mit  $D_{j_1} = D^{(j_1)}$ . (UE: Zeigen Sie dies!) Nach dem Korollar folgt dann, dass  $F = c E_j$  und damit

$$\langle \alpha_1, j_1, m_1 | T_m^{(j)} | \alpha_2, j_2, m_2 \rangle = c \langle j_1, m_1 | j, m; j_2, m_2 \rangle$$

$\uparrow$   
 unabh. von  $m_1, m_2, m$