6. Symmetrien in der Quantentheorie

6.1 Satz von Wigner

Nach einem Satz von Wigner (E.P. Wigner: Gruppentheorie, Vieweg, Braunschweig, 1931, S. 251–254) wird eine Symmetrietransformation auf dem Hilbertraum entweder durch einen unitären oder einen antiunitären Operator dargestellt.

Bemerkung: Die präzisen Voraussetzungen und den Beweis des Satzes von Wigner finden Sie in der Arbeit von V. Bargmann: J. Math. Phys. 5 (1964) 862.

Die Definition eines unitären Operators U sollte wohlbekannt sein:

Def.: Ein linearer Operator $U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt unitär, falls

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$$

Bemerkung: Sei U ein auf ganz $\mathcal{H}$ definierter linearer Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) U ist unitär.

2) U^{-1} existiert und es gilt $U^\dagger = U^{-1}$.

3) U ist surjektiv und es gilt $\langle U\varphi | U\psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$.

4) U ist surjektiv und es gilt $\| U\psi \| = \| \psi \| \;\; \forall \psi \in \mathcal{H}$.

5) U bildet jedes vollständige Orthonormalsystem wieder

auf ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) ab. Das heißt, ist $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ein VONS, dann ist $\{U\varphi_1, U\varphi_2, \dots\}$ ebenfalls ein VONS.

Die Definition eines antiunitären Operators W ist vielleicht weniger geläufig:

Def.: Ein antilinearer Operator $W: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt antiunitär, falls W surjektiv und isometrisch ist.

Das bedeutet:

antilinear: $$W(a\varphi + b\psi) = a^* W\varphi + b^* W\psi$$
$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

surjektiv: $\operatorname{im} W = \mathcal{H}$

isometrisch: $\|W\psi\| = \|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$

Bemerkung: $\Rightarrow \quad \langle W\varphi | W\psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$

Reihenfolge beachten!

Definition des adjungierten Operators $W^\dagger$:

$$\langle \varphi | W\psi \rangle = \langle W^\dagger \varphi | \psi \rangle^* \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

Bem.: für festgehaltenes φ ist $\psi \to \langle \varphi | W\psi \rangle$ ein antilineares Funktional (weil W antilinear) $\to$ $*$ auf der rechten Seite

$\Rightarrow$ $W^\dagger$ ist ebenfalls antilinear.

Aus der Antiunitarität von W folgt weiters, dass <u>auch</u> $W^\dagger$ antiunitär ist und man kann schreiben:

$$W^\dagger W = W W^\dagger = \mathbb{1}$$

<u>Bem.:</u> Das Produkt zweier antilinearer Operatoren ist ein linearer Operator.

6.2 Bewegungsumkehr

<u>Bem.:</u> Wird oft – etwas missverständlich – als „<u>Zeitumkehrtransformation</u>" bezeichnet.

Bewegungsumkehrtransformation T ist <u>antiunitär</u>:

$$T^\dagger \vec{X}\, T = \vec{X} \,, \qquad T^\dagger \vec{P}\, T = -\vec{P}$$

$$[X_k, P_l] = i\hbar\, \delta_{kl}$$

$$T^\dagger [X_k, P_l]\, T = -[X_k, P_l] \quad \text{Vorzeichenänderung}$$

$\Rightarrow$ rechte Seite der Kommutatorrelation muss ebenfalls das Vorzeichen wechseln $\rightarrow$ wäre aber bei einer unitären Transformation <u>nicht</u> der Fall, aber

$$T^\dagger i\, T = -i$$

für <u>antiunitäres</u> T!

Wirkung von T auf verallgemeinerte Basis $\{|\vec{x}\rangle\}$:

$$T|\vec{x}\rangle = |\vec{x}\rangle$$

Wirkung auf Basis $\{|\vec{p}\rangle\}$:

$$T|\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle$$

$$|\psi\rangle = \int d^3x\, |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\psi\rangle = \int d^3x\, |\vec{x}\rangle\, \psi(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \quad T|\psi\rangle = T\int d^3x\, |\vec{x}\rangle \underbrace{\langle\vec{x}|\psi\rangle}_{\psi(\vec{x})} =$$

$$= \int d^3x\, \langle\vec{x}|\psi\rangle^*\; T|\vec{x}\rangle$$

$$= \int d^3x\; \psi(\vec{x})^*\; |\vec{x}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle\vec{x}|T\psi\rangle = \langle\vec{x}|\psi\rangle^* = \psi(\vec{x})^*$$

d. h. räumliche Wellenfunktion wird durch Bewegungsumkehr komplex konjugiert: $\psi(\vec{x}) \xrightarrow{T} \psi(\vec{x})^*$

Bsp.: $\quad e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \xrightarrow{T} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$

$$|\psi\rangle = \int d^3p\, |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\psi\rangle = \int d^3p\, |\vec{p}\rangle\, \tilde{\psi}(\vec{p})$$

$$\Rightarrow \quad T|\psi\rangle = T\int d^3p\, |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\psi\rangle =$$

$$= \int d^3p \langle\vec{p}|\psi\rangle^*\, T|\vec{p}\rangle = \int d^3p\; \tilde{\psi}(\vec{p})^*\, |-\vec{p}\rangle$$

$$= \int d^3p\; \tilde{\psi}(-\vec{p})^*\; |\vec{p}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{p} \,|\, T\psi \rangle = \langle -\vec{p} \,|\, \psi \rangle^* = \tilde{\psi}(-\vec{p})^*$$

Impulsraumwellenfunktion $\tilde{\psi}(\vec{p})$ wird durch Bewegungsumkehr komplex konjugiert bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel von $\vec{p}$: $\tilde{\psi}(\vec{p}) \xrightarrow{T} \tilde{\psi}(-\vec{p})^*$

$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{X}) \Rightarrow T^\dagger H T = H$ weil $V(\vec{x})$ eine

<u>reelle</u> Funktion ist

d.h. T kommutiert mit H: $[H, T] = 0$

$$\Rightarrow \quad T e^{iHt/\hbar} = e^{-iHt/\hbar}\, T \qquad (\text{beachte: } Ti = -iT)$$

$$\Rightarrow \quad T\,\Omega_{\substack{\text{ein}\\ \text{aus}}} = T \lim_{t \to \mp\infty} e^{iHt/\hbar}\, e^{-iH_0 t/\hbar} =$$

$$= \left(\lim_{t \to \mp\infty} e^{-iHt/\hbar}\, e^{iH_0 t/\hbar}\right) T = \Omega_{\substack{\text{aus}\\ \text{ein}}}\, T$$

$$\Leftrightarrow \quad \Omega_{\substack{\text{ein}\\ \text{aus}}} = T^\dagger\, \Omega_{\substack{\text{aus}\\ \text{ein}}}\, T$$

d.h. Bewegungsumkehr vertauscht Ω_{ein} und Ω_{aus}

$$\Rightarrow \quad TS = T\,\Omega_{aus}^\dagger\, \Omega_{ein} = \Omega_{ein}^\dagger\, \Omega_{aus}\, T$$

$$= S^\dagger T$$

bzw. $T^\dagger S^\dagger T = S$

d.h. T vertauscht S mit $S^\dagger = S^{-1}$

$$\langle \chi | S\varphi \rangle = \langle \chi | T^\dagger S^\dagger T\varphi \rangle =$$

$$= \langle T\chi | S^\dagger T\varphi \rangle^* = \langle S^\dagger T\varphi | T\chi \rangle$$

$$= \langle T\varphi | S\, T\chi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad w(\varphi \to \chi) = w(T\chi \to T\varphi)$$

$$\langle \vec{p}\,' | S | \vec{p} \rangle = \langle -\vec{p} | S | -\vec{p}\,' \rangle$$

$$\Rightarrow \quad f(\vec{p}\,', \vec{p}) = f(-\vec{p}, -\vec{p}\,')$$

6.3 Paritätstransformation

Paritätstransformation Π ist unitär mit

$$\Pi^\dagger \vec{X}\, \Pi = -\vec{X}, \quad \Pi^\dagger \vec{P}\, \Pi = -\vec{P}.$$

$$\Pi |\vec{x}\rangle = |-\vec{x}\rangle, \qquad \Pi |\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle$$

$\Rightarrow \quad \Pi^2 = \mathbb{1}$, d. h. $\Pi^\dagger = \Pi^{-1} = \Pi$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von Π : ± 1

$$\langle \vec{x} | \Pi \psi \rangle = \langle -\vec{x} | \psi \rangle = \psi(-\vec{x})$$

$$\langle \vec{p} | \Pi \psi \rangle = \langle -\vec{p} | \psi \rangle = \tilde{\psi}(-\vec{p})$$

$$\Pi \vec{P}^2 \Pi = \vec{P}^2, \quad \Pi V(\vec{X}) \Pi = V(-\vec{X})$$

$\Rightarrow \quad H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{X})$ kommutiert mit Π, falls $V(-\vec{x}) = V(\vec{x})$

Spezialfall: $V = V(|\vec{x}|)$

Falls also $[H,\Pi]=0$, können H und Π gleichzeitig diagonalisiert werden. (Im Ortsraum: gerade bzw. ungerade Energieeigenfunktionen.) Für die Zeitentwicklung bedeutet $[H,\Pi]=0$, dass Π eine <u>Erhaltungsgröße</u> ist:

$$\frac{d\Pi_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \Pi_H(t)] = 0 \qquad \text{(Heisenbergbild)}$$

Präpariert man etwa zum Zeitpunkt $t=0$ ein Teilchen in einem Zustand mit Parität p ($p=\pm1$), so befindet es sich auch zu einem späteren Zeitpunkt t in einem Zustand mit der gleichen Parität p (Schrödingerbild).

Für Streuprobleme bedeutet dies, dass $[S,\Pi]=0$. Hat man zwei Paritätseigenzustände $|\phi\rangle$, $|\phi'\rangle$,

$$\Pi|\phi\rangle = p|\phi\rangle, \quad \Pi|\phi'\rangle = p'|\phi\rangle,$$

so ist $\langle\phi'|S|\phi\rangle = 0$ außer für $p=p'$.

Für <u>beliebige</u> Anfangs- und Endzustände gilt

$$\langle\phi'|S\phi\rangle = \langle\Pi\phi'|S\Pi\phi\rangle .$$

Speziell hat man

$$\langle\vec{p}\,'|S|\vec{p}\rangle = \langle-\vec{p}\,'|S|-\vec{p}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad f(\vec{p}\,',\vec{p}) = f(-\vec{p}\,',-\vec{p}) \qquad \text{bei Paritätsinvarianz}$$

6.4 Räumliche Translationen

Ich definieren die unitären Operatoren $D(\vec{a})$ durch

$$D(\vec{a})\,|\vec{x}\rangle = |\vec{x}+\vec{a}\rangle \,, \quad \vec{a}\in\mathbb{R}^3 .$$

$$\Rightarrow \quad D(\vec{a})\,D(\vec{b}) = D(\vec{a}+\vec{b}) = D(\vec{b})\,D(\vec{a}),$$

$$D(\vec{a})^\dagger = D(-\vec{a}) = D(\vec{a})^{-1}$$

Bem.: räumliche Translationen bilden eine dreiparametrige abelsche Liegruppe

Wirkung von $D(\vec{a})$ auf $|\vec{p}\rangle$:

$$D(\vec{a})\,|\vec{p}\rangle = D(\vec{a}) \int d^3x\, |\vec{x}\rangle \underbrace{\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle}_{\frac{e^{i\vec{p}.\vec{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}} = \int d^3x\, |\vec{x}+\vec{a}\rangle \frac{e^{i\vec{p}.\vec{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

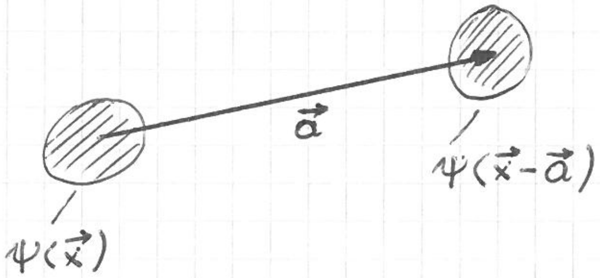
Variablentransformation $\vec{y}=\vec{x}+\vec{a}$:

$$\Rightarrow \quad D(\vec{a})\,|\vec{p}\rangle = \int d^3y\, |\vec{y}\rangle \frac{e^{i\vec{p}.(\vec{y}-\vec{a})/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} =$$

$$= e^{-i\vec{p}.\vec{a}/\hbar} \int d^3y\, |\vec{y}\rangle\langle\vec{y}|\vec{p}\rangle = e^{-i\vec{p}.\vec{a}/\hbar}\, |\vec{p}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad D(\vec{a}) = e^{-i\vec{P}.\vec{a}/\hbar}$$

Impulsoperator $\vec{P}$ ist der Erzeuger (Generator) der räumlichen Verschiebungen (Translationen) im Ortsraum: $\langle \vec{x} | D(\vec{a}) | \psi \rangle = \underbrace{\langle \vec{x} - \vec{a} | \psi \rangle}_{\psi(\vec{x}-\vec{a})}$



im Impulsraum: $\langle \vec{p} | D(\vec{a}) | \psi \rangle = e^{-i\vec{p}.\vec{a}/\hbar} \underbrace{\langle \vec{p} | \psi \rangle}_{\tilde{\psi}(\vec{p})}$

$$\underbrace{D(a)^{\dagger}}_{e^{+i\vec{P}.\vec{a}/\hbar}} f(\vec{X}) \underbrace{D(\vec{a})}_{e^{-i\vec{P}.\vec{a}/\hbar}} = f(\vec{X}+\vec{a})$$

speziell: $e^{i\vec{P}.\vec{a}/\hbar} \vec{X} e^{-i\vec{P}.\vec{a}/\hbar} = \vec{X} + \vec{a}$

klarerweise: $e^{i\vec{P}.\vec{a}/\hbar} \vec{P} e^{-i\vec{P}.\vec{a}/\hbar} = \vec{P}$

Bem.: Hätten $D(\vec{a})$ auch durch diese Relationen (Wirkung auf $\vec{X}$ und $\vec{P}$) definieren können.

$$\langle \psi | e^{i\vec{P}.\vec{a}/\hbar} \vec{X} e^{-i\vec{P}.\vec{a}/\hbar} | \psi \rangle = \underbrace{\langle D(\vec{a})\psi | \vec{X} | D(\vec{a})\psi \rangle}_{\text{Erwartungswert des Ortsoperators im verschobenen Zustand } D(\vec{a})|\psi\rangle}$$

$$= \underbrace{\langle \psi | \vec{X} + \vec{a} | \psi \rangle}_{\text{Erwartungswert von } \vec{X}+\vec{a} \text{ im ursprünglichen Zustand } |\psi\rangle}$$

6.5 Weylalgebra

Nimmt man $f(\vec{X}) = e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}$, so erhält man die Weylalgebra-Relation

$$\boxed{e^{i\vec{P}.\vec{a}/\hbar}\, e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}\, e^{-i\vec{P}.\vec{a}/\hbar} = e^{i(\vec{X}+\vec{a}).\vec{q}/\hbar}}$$

Bem.: Die Weylalgebra ist äquivalent zur kanonischen Vertauschungsrelation $[X_k, P_\ell] = i\hbar\,\delta_{k\ell}\,\mathbb{1}$, hat aber den Vorteil, dass man statt mit unbeschränkten Operatoren nur mit unitären Operatoren hantiert → keine Bereichsfragen

Man kann natürlich eine Relation erhalten, in der die Rollen von $\vec{X}$ und $\vec{P}$ vertauscht sind:

$$e^{-i\vec{X}\vec{q}/\hbar}\Big|\, e^{i\vec{P}.\vec{a}/\hbar}\, e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}\, e^{-i\vec{P}.\vec{a}/\hbar} = e^{i\vec{a}.\vec{q}/\hbar}\, e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}\,\Big|\cdot e^{i\vec{P}.\vec{a}/\hbar}$$

$$\Rightarrow\quad e^{-i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}\, e^{i\vec{P}.\vec{a}/\hbar}\, e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar} = e^{i(\vec{P}+\vec{q}).\vec{a}/\hbar}$$

bzw. für eine beliebige (geignete) Funktion $g(\vec{P})$:

$$e^{-i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}\, g(\vec{P})\, e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar} = g(\vec{P}+\vec{q})$$

Der Operator $e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}$ bewirkt also eine Translation im Impulsraum. Der Ortsoperator $\vec{X}$ ist also der Erzeuger von Verschiebungen des Impulses.

Man kann dies auch durch die Betrachtung der Wirkung des Operators $e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}$ auf $|\vec{p}\rangle$ sehen:

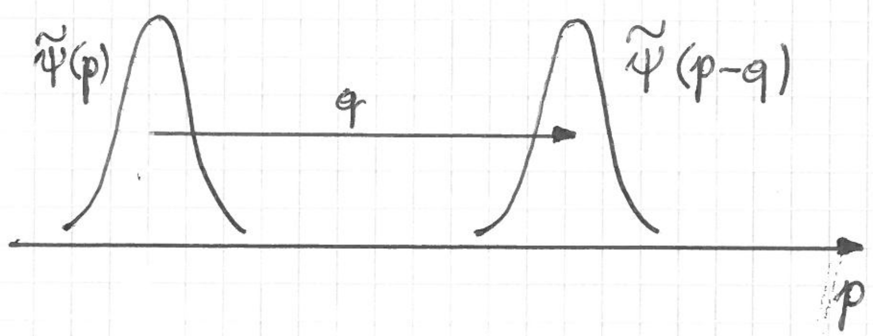
$$\langle\vec{x}|e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}|\vec{p}\rangle = e^{i\vec{q}.\vec{x}/\hbar}\underbrace{\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle}_{\frac{e^{i\vec{p}.\vec{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}}$$

$$= \frac{e^{i(\vec{p}+\vec{q}).\vec{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} = \langle\vec{x}|\vec{p}+\vec{q}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}|\vec{p}\rangle = |\vec{p}+\vec{q}\rangle$$

$$\langle\vec{p}|e^{i\vec{X}.\vec{q}/\hbar}|\psi\rangle = \underbrace{\langle\vec{p}-\vec{q}|\psi\rangle}_{\tilde{\psi}(\vec{p}-\vec{q})}$$

<u>$d=1$:</u>



6.6 Räumliche Drehungen

SO(3) = Gruppe der (reellen) orthogonalen 3×3 Matrizen mit Determinante eins

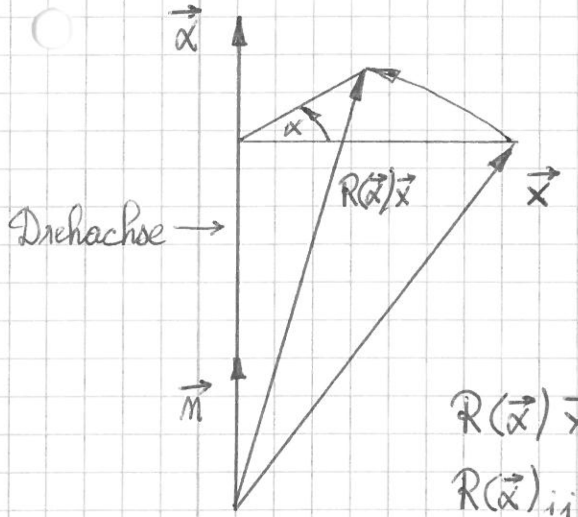
$R \in SO(3) \Leftrightarrow R \in L(\mathbb{R}^3)$ mit $R^T R = \mathbb{1}$ und $\det R = 1$

mögliche Parametrisierung der Elemente von SO(3):

$$R(\vec{\alpha}) \;, \quad \vec{\alpha} = \alpha\, \vec{n} \;, \quad |\vec{\alpha}| = \alpha \;, \quad |\vec{n}| = 1$$

$0 \leq \alpha \leq \pi$

$\vec{\alpha} = \pi \vec{n}$ und $-\pi \vec{n}$ identifiziert



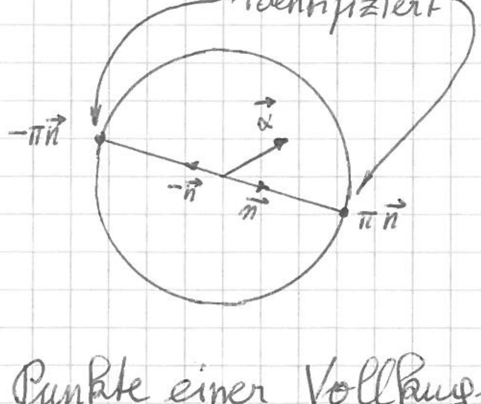
Wirkung von $R(\vec{\alpha})$ auf einen Vektor $\vec{x}$:

$$R(\vec{\alpha})\,\vec{x} = \vec{x}\cos\alpha + \vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{x})\,(1-\cos\alpha) + \vec{n}\times\vec{x}\,\sin\alpha$$

$$R(\vec{\alpha})_{ij} = \delta_{ij}\cos\alpha + n_i n_j\,(1-\cos\alpha) - \varepsilon_{ijk}\, n_k \sin\alpha$$

$$\operatorname{Tr} R(\vec{\alpha}) = 1 + 2\cos\alpha \;, \qquad n_i \sin\alpha = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk} R_{jk}$$

SO(3) ist eine dreiparametrige kompakte Liegruppe



kompakte, zshgd. Mannigfaltigkeit

$R(\vec{\alpha}) \leftrightarrow$ Punkte einer <u>Vollkugel</u> $0 \leq |\vec{\alpha}| \leq \pi$ mit identifizierten Antipodenpunkten an der Oberfläche andere mögliche Parametrisierung: <u>Eulerwinkel</u>

$$R(\phi\vec{e}_3)\,R(\Theta\vec{e}_2)\,R(\psi\vec{e}_3)$$

(siehe M1-Skriptum)

<u>Darstellung</u> räumlicher Drehungen im Zustandsraum eines spinlosen Teilchens:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{unitär}}}{U(\vec{\alpha})}\,|\vec{x}\rangle = |R(\vec{\alpha})\vec{x}\rangle \quad , \quad R(\vec{\alpha})\in SO(3)$$

T2: $\quad U(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar}$

$L_k = \varepsilon_{klm} X_l P_m$ $\quad$ <u>Bahndrehimpulsoperator</u>

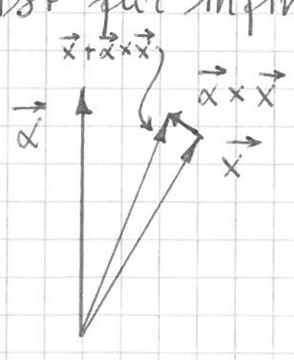
Überprüfung für eine <u>infinitesimale</u> Rotation:

$$(\mathbb{1} - i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar)\,|\vec{x}\rangle = (\mathbb{1} - i\alpha_k\varepsilon_{klm}X_l P_m/\hbar)\,|\vec{x}\rangle$$

$$= (\mathbb{1} - i\alpha_k\varepsilon_{klm}x_l P_m/\hbar)\,|\vec{x}\rangle = (\mathbb{1} - iP_m\varepsilon_{mkl}\alpha_k x_l/\hbar)\,|\vec{x}\rangle$$

$$= (\mathbb{1} - i\vec{P}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{x})/\hbar)\,|\vec{x}\rangle = |\vec{x} + \vec{\alpha}\times\vec{x}\rangle$$

tatsächlich ist für infinitesimales $\vec{\alpha}$: $R(\vec{\alpha})\vec{x} = \vec{x} + \vec{\alpha}\times\vec{x}$



analog gilt: $e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar}\,|\vec{p}\rangle = |R(\vec{\alpha})\vec{p}\rangle$

Die Operatoren L_k $(k=1,2,3)$ erfüllen die Drehimpuls-algebra - Relationen

$$[L_k, L_l] = i\hbar\,\varepsilon_{klm} L_m$$

L_1, L_2, L_3 bilden die Basis einer unendlichdimensionalen Darstellung der Liealgebra der $SO(3)$.

Wirkung einer räumlichen Drehung auf $\vec{X}, \vec{P}$:

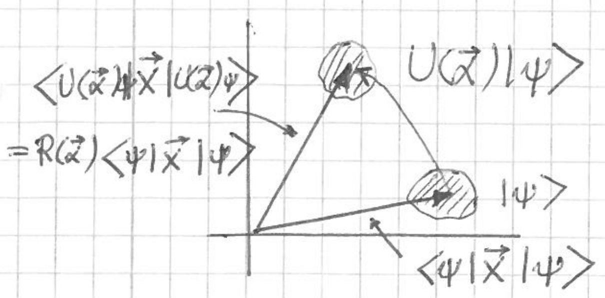
$$\left.\begin{aligned} e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar}\,\vec{X}\,e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar} &= R(\vec{\alpha})\vec{X} \\ e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar}\,\vec{P}\,e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar} &= R(\vec{\alpha})\vec{P} \end{aligned}\right\}\ \text{d.h. } \vec{X} \text{ und } \vec{P} \text{ sind Vektoroperatoren}$$

Interpretation für Erwartungswerte:

$$\langle\psi|\,e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar}\,\vec{X}\,\underbrace{e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar}}_{U(\vec{\alpha})}\,|\psi\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle U(\vec{\alpha})\psi\,|\,\vec{X}\,|\,U(\vec{\alpha})\psi\rangle}_{\text{Erwartungswert des Ortsoperators im gedrehten Zstd. } U(\vec{\alpha})|\psi\rangle}$$

$$= \langle\psi|\,R(\vec{\alpha})\vec{X}\,|\psi\rangle = \underbrace{R(\vec{\alpha})\,\langle\psi|\vec{X}|\psi\rangle}_{\text{rotierter Ortserwartungswert des ursprünglichen Zustands } |\psi\rangle}$$



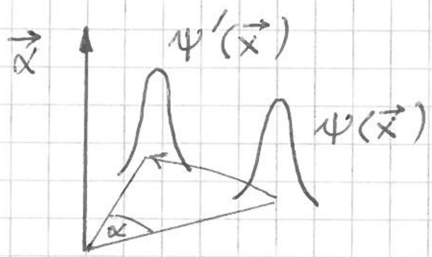
Für „beliebige" Funktionen $f(\vec{X})$, $g(\vec{P})$ gilt:

$$e^{i\vec{\alpha}.\vec{L}/\hbar}\, f(\vec{X})\, e^{-i\vec{\alpha}.\vec{L}/\hbar} = f(R(\vec{\alpha})\vec{X})$$

$$e^{i\vec{\alpha}.\vec{L}/\hbar}\, g(\vec{P})\, e^{-i\vec{\alpha}.\vec{L}/\hbar} = g(R(\vec{\alpha})\vec{P})$$

Wirkung einer räumlichen Drehung in der $\vec{x}$-Darstellung:

$$\underbrace{\langle \vec{x} |\, e^{-i\vec{\alpha}.\vec{L}/\hbar}\, | \psi \rangle}_{\psi'(\vec{x})} = \underbrace{\langle R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{x} \,|\, \psi \rangle}_{\psi(R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{x})}$$



Durch $(D(R)\psi)(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x})$, $R \in SO(3)$

wird ein Darstellung $D: SO(3) \to B(L^2(\mathbb{R}^3))$ der $SO(3)$ im Funktionenraum $L^2(\mathbb{R}^3)$ definiert.

Überprüfung der <u>Darstellungseigenschaft</u>:

$$(D(R_1)D(R_2)\psi)(\vec{x}) = (D(R_2)\psi)(R_1^{-1}\vec{x})$$

$$= \psi(R_2^{-1}R_1^{-1}\vec{x}) = \psi((R_1R_2)^{-1}\vec{x}) = (D(R_1R_2)\psi)(\vec{x})$$

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow D(R_1)D(R_2) = D(R_1R_2) \ \checkmark$$

Wirkung einer räumlichen Drehung auf den Drehimpulsoperator:

$$e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar}\ \vec{L}\ e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar} = R(\vec{\alpha})\vec{L}$$

<u>Bem.:</u> $\vec{L}$ ist ebenfalls ein Vektoroperator

bzw. $$e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar}\ e^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}/\hbar}\ e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}/\hbar} = e^{-i\vec{\beta}\cdot R(\vec{\alpha})\vec{L}/\hbar}$$
$$= e^{-i\,R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{\beta}\cdot\vec{L}/\hbar}$$

$$\Leftrightarrow \quad U(\vec{\alpha})^{-1}\, U(\vec{\beta})\, U(\vec{\alpha}) = U\left(R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{\beta}\right)$$

<u>Bem.:</u> entspricht natürlich in der definierenden Darstellung der SO(3) der Formel

$$R(\vec{\alpha})^{-1}\, R(\vec{\beta})\, R(\vec{\alpha}) = R\left(R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{\beta}\right)$$

(siehe M1-Skriptum!)

$$\Rightarrow \quad R(\vec{\beta})\, R(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha})\, R\left(R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad R(\vec{\beta})\, R(\vec{\alpha}) \overset{\text{i. Allg.}}{\neq} R(\vec{\alpha})\, R(\vec{\beta}) \quad (\text{außer für } \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta})$$

(Nichtkommutativität der Gruppenelemente der SO(3))

Teilchen mit Spin

Gesamtdrehimpuls $\quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Komponenten von $\vec{S}$ erfüllen ebenfalls die Drehimpulsalgebra

$$[S_k, S_l] = i\hbar\, \varepsilon_{klm} S_m$$

und vertauschen mit allen Komponenten von $\vec{L}$.

$$\Rightarrow \qquad [J_k, J_l] = i\hbar\, \varepsilon_{klm} J_m$$

mögliche Eigenwerte von $\vec{S}^2$: $\hbar^2 s(s+1)$ mit $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

im Ggs. zum Bahndrehimpuls $\vec{L}$ sind jetzt auch halbzahlige Werte von s möglich (z.B. $e^\pm$: $s = \frac{1}{2}$)

$\vec{S} \rightarrow$ Darstellung der Liealgebra $so(3)$, aber $D^{(s)}(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{S}/\hbar}$ bilden für halbzahlige s keine Darstellung der $SO(3)$, sondern nur eine Darstellung bis auf eine Phase.

Bsp.: $\quad e^{-i\pi S_3/\hbar}\, e^{-i\pi S_3/\hbar} \,|s, s_3\rangle = (-1)^{2s_3} \,|s, s_3\rangle$

Es handelt sich um Darstellungen der $SU(2)$.

Da Zustandsvektoren nur bis auf einen Phasenfaktor bestimmt sind, ist die $SU(2)$ die relevante Gruppe zur Realisierung von räumlichen Drehungen in der QM.

6.7 Geschwindigkeitstransformation

„boost" (spezielle Galileitransformation)

Wunschliste: suchen unitäre Transformation $G(\vec{v}) = e^{-i\vec{v}.\overset{\text{hermit.}}{\vec{N}}/\hbar}$ mit folgenden Eigenschaften (Teilchen mit Masse m):

$$G(\vec{v})\,|\vec{x}\rangle = e^{i\varphi(\vec{x},\vec{v},t)}\,|\vec{x}+\vec{v}t\rangle$$

$$G(\vec{v})\,|\vec{p}\rangle = e^{i\psi(\vec{p},\vec{v},t)}\,|\vec{p}+m\vec{v}\rangle$$

bzw. für die Operatoren:

$$G(\vec{v})^{-1}\,\vec{X}\,G(\vec{v}) = \vec{X} + \vec{v}t$$

$$G(\vec{v})^{-1}\,\vec{P}\,G(\vec{v}) = \vec{P} + m\vec{v}$$

wir wissen bereits: räumliche Verschiebung $t\vec{v}$ erzeugt der Operator $e^{-it\vec{v}.\vec{P}/\hbar}$; Impulsverschiebung $m\vec{v}$ erzeugt der Operator $e^{im\vec{v}.\vec{X}/\hbar}$ $\Rightarrow$ $e^{-it\vec{v}.\vec{P}/\hbar}\,e^{im\vec{v}.\vec{X}/\hbar}$ würde das gewünschte leisten, wir wollen aber noch die Form $e^{-i\vec{v}.\vec{N}/\hbar}$ $(\vec{N}^{+} = \vec{N})$ bekommen $\rightarrow$ verwenden die Formel

$$e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{q}.\vec{X}-\vec{a}.\vec{P})} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}.\vec{X}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}.\vec{P}}\,e^{-i\vec{q}.\vec{a}/2\hbar}$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}.\vec{P}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}.\vec{X}}\,e^{i\vec{q}.\vec{a}/2\hbar}$$

Wir definieren daher:

$$G(\vec{v}) = e^{-i\vec{v}.\vec{N}/\hbar} := e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{v}\cdot(t\vec{P}-m\vec{X})}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}m\vec{v}.\vec{X}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}t\vec{v}.\vec{P}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t}$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}t\vec{v}.\vec{P}}\, e^{\frac{i}{\hbar}m\vec{v}.\vec{X}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t}$$

$\vec{N} = t\vec{P} - m\vec{X}$ Erzeuger der Geschwindigkeitstransformationen („booster")

$$[N_k, N_l] = 0 \Leftrightarrow G(\vec{v}_1)G(\vec{v}_2) = G(\vec{v}_2)G(\vec{v}_1) = G(\vec{v}_1+\vec{v}_2)$$

Geschwindigkeitstransformationen bilden eine <u>kommutative</u> Untergruppe der Galileigruppe.

<u>Bem.:</u> Die volle <u>Galileigruppe</u> besteht aus den Geschwindigkeitstransformationen, den räumlichen Drehungen (<u>homogene</u> Galileigruppe) sowie den räumlichen und zeitlichen <u>Translationen</u>.

Wirkung von $G(\vec{v})$ auf die (verallgemeinerten) Ortseigenzustände:

$$G(\vec{v})\,|\vec{x}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}t\vec{v}.\vec{P}}\, e^{\frac{i}{\hbar}m\vec{v}.\vec{X}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t}\,|\vec{x}\rangle$$

$$= \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}m\vec{v}.\vec{x}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t}}_{e^{i\varphi(\vec{x},\vec{v},t)}}\,|\vec{x}+t\vec{v}\rangle$$

Wirkung von $G(\vec{v})$ auf die (verallgemeinerten) Impulseigenzustände:

$$G(\vec{v})\,|\vec{p}\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} m\vec{v}\cdot\vec{X}}\; e^{-\frac{i}{\hbar} t\vec{v}\cdot\vec{P}}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t}\,|\vec{p}\rangle$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}t\vec{v}\cdot\vec{p}}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t}}_{e^{i\varphi(\vec{p},\vec{v},t)}}\,|\vec{p}+m\vec{v}\rangle$$

$|\psi(t)\rangle$ sei bel. Zustandsvektor im Schrödingerbild

Betrachte den galileitransformierten Zustand $G(\vec{v})\,|\psi(t)\rangle$ in der <u>Ortsdarstellung</u>:

$$\langle\vec{x}\,|\,G(\vec{v})\,|\,\psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} m\vec{v}\cdot\vec{x}}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t}\;\underbrace{\langle\vec{x}-t\vec{v}\,|\,\psi(t)\rangle}_{\psi(t,\vec{x}-t\vec{v})}$$

Verschiebung des Impulses

räuml. Verschiebung der Wellenfunktion

wobei $\langle\vec{x}\,|\,\psi(t)\rangle = \psi(t,\vec{x})$

<u>Beispiel:</u> Freies Teilchen in einem Impulseigenzustand

$$\underbrace{\langle\vec{x}\,|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{P}^2}{2m}t}\,|\vec{p}\rangle}_{\langle\vec{x}|\psi(t)\rangle=\psi(t,\vec{x})} = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{p}^2}{2m}t}$$

$$\langle\vec{x}\,|\,G(\vec{v})\,e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{P}^2}{2m}t}\,|\vec{p}\rangle = \frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-t\vec{v})/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\; e^{\frac{i}{\hbar}m\vec{v}\cdot\vec{x}}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{p}^2}{2m}t} \times e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t}$$

$$= \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}+m\vec{v})\cdot\vec{x}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{(\vec{p}+m\vec{v})^2}{2m}t}$$

Wellenfunktion eines Teilchens mit Impuls $\vec{p}+m\vec{v}$ und kinetischer Energie $\frac{(\vec{p}+m\vec{v})^2}{2m}$ ✓

Analoge Diskussion im <u>Impulsraum</u>:

$$\langle\vec{p}\,|\,G(\vec{v})\,|\,\psi(t)\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{räumliche Verschiebung}}}{e^{-\frac{i}{\hbar}t\vec{v}\cdot\vec{p}}} \; e^{+\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t} \; \underbrace{\langle\vec{p}-m\vec{v}\,|\,\psi(t)\rangle}_{\tilde{\psi}(t,\vec{p}-m\vec{v})}$$

$\uparrow$ Verschiebung im Impulsraum

<u>Beispiel</u>: Freies Teilchen in einem Impulseigenzustand $|\vec{p}_0\rangle$

$$\langle\vec{p}\,|\,G(\vec{v})\,e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{P}^2}{2m}t}\,|\,\vec{p}_0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}t\vec{v}\cdot\vec{p}} \; e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t} \; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{p}_0^2}{2m}t}$$

$$\times \underbrace{\langle\vec{p}-m\vec{v}\,|\,\vec{p}_0\rangle}_{\delta^{(3)}(\vec{p}-m\vec{v}-\vec{p}_0)}$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}t\vec{v}\cdot(m\vec{v}+\vec{p}_0)} \; e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{v}^2}{2}t} \; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{p}_0^2}{2m}t} \; \delta^{(3)}(\vec{p}-m\vec{v}-\vec{p}_0)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{(\vec{p}_0+m\vec{v})^2}{2m}t} \; \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_0-m\vec{v}) \quad ✓$$

<u>Bemerkung</u>: Der Hamiltonoperator $H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{X})$ ist (außer für konstantes Potential $V(\vec{x}) = \text{const.}$) <u>nicht</u> translationsinvariant. Beschreibt der Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ die Bewegung eines Teilchens im Potential $V(\vec{x})$, d.h.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left[\frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{X})\right] |\psi(t)\rangle,$$

so beschreibt $G(\vec{v})|\psi(t)\rangle$ die Bewegung eines Teilchens in dem zeitabhängigen Potential $V(\vec{x} - \vec{v}t)$.

<u>Bemerkung</u>: Die räumlichen Translationen $(\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a})$ bilden eine <u>abelsche</u> Untergruppe der Galileigruppe. Sie werden im Zustandsraum durch unitäre Operatoren $D(\vec{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}.\vec{P}}$ repräsentiert, welche eine (unendlich-dimensionale) <u>Darstellung</u> der Translationsgruppe bilden: $D(\vec{a}_1)D(\vec{a}_2) = D(a_1 + \vec{a}_2) = D(\vec{a}_2)D(\vec{a}_1)$, $D(\vec{a})^{-1} = D(-\vec{a})$, $D(\vec{0}) = \mathbb{1}$.

Ebenso bilden die (reinen) Geschwindigkeitstransformationen $(\vec{x} \to \vec{x} + \vec{v}t$, bzw. $\vec{p} \to \vec{p} + m\vec{v})$ eine <u>abelsche</u> Untergruppe der Galileigruppe. Die entsprechenden im Hilbertraum wirkenden Operatoren $G(\vec{v}) = e^{-i\vec{v}\cdot\vec{N}/\hbar}$ erfüllen ebenfalls die Darstellungseigenschaft:

$$G(\vec{v}_1)\, G(\vec{v}_2) = G(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = G(\vec{v}_2 + \vec{v}_1),$$

$$G(\vec{v})^{-1} = G(-\vec{v}), \quad G(\vec{0}) = \mathbb{1}.$$

Man kann nun alle räumlichen Translationen und alle Geschwindigkeitstransformationen zu einer größeren Untergruppe zusammenfassen. Diese ist wieder abelsch, da Translationen und Geschwindigkeitstransformationen miteinander kommutieren, denn

$$\vec{x} \to (\vec{x} + \vec{a}) \to (\vec{x} + \vec{a}) + \vec{v}t = \vec{x} + \vec{a} + \vec{v}t$$

und

$$\vec{x} \to (\vec{x} + \vec{v}t) \to (\vec{x} + \vec{v}t) + \vec{a} = \vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}$$

führen wegen der Kommutativität der Vektoraddition auf dasselbe Ergebnis. Analoges gilt bei der Anwendung der entsprechenden Transformationen auf den Impuls:

$$\vec{p} \to \vec{p} \to \vec{p} + m\vec{v}$$

$$\vec{p} \to \vec{p} + m\vec{v} \to \vec{p} + m\vec{v}$$

Allerdings vertauschen die Operatoren $G(\vec{v})$ und $D(\vec{a})$ i. Allg. <u>nicht</u>, denn

$$G(\vec{v})\,D(\vec{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{v}.(\vec{P}t - m\vec{X})}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}.\vec{P}}$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}.\vec{P}}\, e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{a}.\vec{P}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{v}.(\vec{P}t - m\vec{X})}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}.\vec{P}}$$

$$= D(\vec{a})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{v}.[\vec{P}t - m(\vec{X}+\vec{a})]} = D(\vec{a})\,G(\vec{v})\,e^{im\vec{v}.\vec{a}/\hbar}.$$

Wir haben es also wieder nicht mit einer Darstellung der Gruppe im strengen Sinn zu tun, sondern mit einer ~~a~~ Darstellung bis auf eine Phase (<u>Strahldarstellung</u>).

<u>Bemerkung:</u> Betrachtet man die Relation $G(\vec{v})D(\vec{a}) = D(\vec{a})G(\vec{v})e^{\frac{im\vec{v}\vec{a}}{\hbar}}$ für infinitesimale Werte von $\vec{v}, \vec{a}$, so erhält die Kommutatorrelation

$$[\vec{a}.\vec{P}, \vec{v}.\vec{N}] = i\hbar m\,\vec{v}.\vec{a}\ ,$$

was man natürlich auch durch direktes Ausrechnen des Kommutators $[P_k, N_\ell]$ verifizieren kann:

$$[P_k, N_\ell] = [P_k, P_\ell t - mX_\ell] = -m\,[P_k, X_\ell] =$$
$$= i\hbar m\,\delta_{k\ell}$$

6.8 Symmetrien und Erhaltungssätze

Sei H der Hamiltonoperator eines Systems. Die Zeitentwicklung eines Zustandsvektors im Schrödingerbild wird dann durch

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

beschrieben. Der Erwartungswert einer Observablen A zum Zeitpunkt t ist dann durch

$$\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\underbrace{e^{iHt/\hbar} A\, e^{-iHt/\hbar}}_{A_H(t)} \underbrace{|\psi(0)\rangle}_{|\psi_H\rangle \equiv |\psi\rangle}$$

gegeben. Die Observable A heißt Erhaltungsgröße des Systems, falls $\langle\psi|e^{iHt/\hbar} A\, e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle$ unabhängig von t ist für alle $|\psi\rangle$. Dies ist gleichbedeutend mit $A_H(t) = A_H(0)$ für alle t.

$$[e^{-iHt/\hbar}, A] = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow [e^{-iHt/\hbar}, e^{iAs}] = 0 \quad \forall t, s$$

$$\Rightarrow [H, e^{iAs}] = 0 \quad \forall s$$

$e^{iAs} =: U(s)$ ist ein unitärer Operator, also eine Symmetrie.

$U(s) = e^{iAs}$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & U(s) \text{ ist unitär, } U(0) = \mathbb{1} \\ \text{ii)} & U(s_1)\,U(s_2) = U(s_1 + s_2) = U(s_2)\,U(s_1) \end{array}\right\} \Rightarrow U(s)^\dagger = U(-s)$$

iii) $\frac{d}{ds} U(s)|\psi\rangle = i\,A\,U(s)\,|\psi\rangle \quad \forall\, |\psi\rangle \in D(A)$

d.h. die $U(s)$ bilden eine <u>einparametrige</u> (abelsche) <u>Gruppe</u>

→ Eine Erhaltungsgröße führt <u>automatisch</u> zu einer einparametrigen Gruppe von Symmetrien des Hamiltonoperators.

Nach dem <u>Satz von Stone</u> gilt aber auch die Umkehrung:

Sei $U(s)$ gegeben, das i) und ii) erfüllt mit

$$\| U(s)|\psi\rangle - |\psi\rangle \| \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

(„stark stetig"), dann gibt es einen selbst-adjungierten Operator A, sodass $U(s) = e^{iAs}$, wobei

$$i\,A|\psi\rangle = \frac{d}{ds} U(s)\,|\psi\rangle \Big|_{s=0} =$$

$$= s\text{-}\lim_{s\to 0} \frac{U(s) - \mathbb{1}}{s}\,|\psi\rangle \qquad \forall\, |\psi\rangle \in D(A)$$

<u>Bemerkung:</u> <u>Falls</u> A <u>beschränkt</u> ist (d.h.
$\|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\| < \infty$), kann man

$$e^{iAs} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iAs)^n}{n!}$$ schreiben.

Falls nun $U(s)$ eine Symmetrie des Hamiltonoperators ist, d.h. $[U(s), H] = 0$, vertauscht auch A mit H und ist somit eine Erhaltungrößße.

$$\boxed{\text{Erhaltungsgrößße} \leftrightarrow \text{einparametrige Gruppe von Symm. von } H}$$

<u>Bemerkung:</u> Es gibt auch Fälle, wo die Symmetrie nicht nur ein unitärer, sondern auch ein selbstadjungierter Operator ist (z.B. Raumspiegelung Π). In diesem Fall muss man nicht zu den einparametrigen Gruppen gehen, denn der Symmetrieoperator ist selbst eine erhaltene Observable.

6.9 Symmetriegruppen

Beispiele von Gruppen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\} \text{ mit Verknüpfung } \cdot \\ 2) & \mathbb{R}^n \text{ mit } + \\ 3) & \mathbb{Z}^n \text{ mit } + \\ 4) & \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \text{ mit } \cdot \end{array}\right\} \text{abelsche Gruppen}$$

5) $GL(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
Gruppe aller $n \times n$ - Matrizen über $\mathbb{K}$ mit $\det \neq 0$
nicht kommutativ für $n \geq 2$

6) verschiedene Untergruppen von $GL(n, \mathbb{K})$:

$O(n) := \{ O \in GL(n, \mathbb{K}) : O^T O = O O^T = \mathbb{1} \}$

$SO(n) := \{ R \in O(n) : \det R = 1 \}$

$U(n) := \{ U \in GL(n, \mathbb{C}) : U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \}$

$SU(n) := \{ U \in U(n) : \det U = 1 \}$

<u>Definition:</u> Eine <u>Darstellung</u> einer Gruppe G auf einem linearen Raum $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung $g \mapsto D(g)$, wobei $D(g)$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}$ ist, mit

$$D(e) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}, \quad D(g_1) D(g_2) = D(g_1 g_2) \quad \forall g_{1,2} \in G$$

Falls $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $D(g)$ unitär für alle $g \in G$, dann heißt D <u>unitäre Darstellung</u>.

<u>Bemerkung:</u> Die bisher diskutierten Beispiele entsprechen unitären Darstellungen von folgenden Gruppen:

$D(\vec{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P}}$: $G = (\mathbb{R}^3, +)$

$\Pi, \Pi^2 = \mathbb{1}$: $G = (\mathbb{Z}_2, \cdot)$

$U(\vec{\alpha}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \cdot \vec{L}}$ $G = (SO(3), \cdot)$

$G(\vec{v}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{v} \cdot \vec{N}}$ $G = (\mathbb{R}^3, +)$

Definition: Eine Darstellung D heißt irreduzibel, falls es keinen echten invarianten Teilraum $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ gibt mit $D(g)\,\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} \quad \forall g \in G$.

Für kompakte Gruppen lässt sich jede unitäre Darstellung $\mathcal{U}$ als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen schreiben, d. h. es gibt eine unitäre Transformation

$$V : \mathcal{H} \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{H}_i$$

und irreduzible Darstellungen $\mathcal{U}_i$ auf $\mathcal{H}_i$, sodass

$$V^{-1}\,\mathcal{U}(g)\,V = \bigoplus_i \mathcal{U}_i(g),$$

d. h.

$$V^{-1}\,\mathcal{U}(g)\,V = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1(g) & & \\ & \boxed{\mathcal{U}_2(g)} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

Lemma von Schur:

Eine unitäre Darstellung $\mathcal{U}$ von G auf einem Hilbertraum ist irreduzibel.

$$\Updownarrow$$

$[C, \mathcal{U}(g)] = 0 \quad \forall g \in G$ impliziert $C = c\,\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$, $c \in \mathbb{C}$.

Wir haben bereits gesehen, dass bisweilen eine Erweiterung des Darstellungsbegriffes nötig ist:

Def.: $\mathcal{U}$ heißt (unitäre) Darstellung einer Gruppe G bis auf eine Phase (projektive Darstellung), falls

$$\mathcal{U}(g_1)\,\mathcal{U}(g_2) = e^{i\omega(g_1,g_2)}\,\mathcal{U}(g_1 \circ g_2)$$

mit $\omega(g_1,g_2) \in \mathbb{R}$.

Motivation: In der QM beschreiben die Zustandsvektoren $|\psi\rangle$ und $e^{i\omega}|\psi\rangle$ denselben Zustand.

Definition: G ist eine Symmetriegruppe eines quantenmechanischen Systems, falls G auf dem Hilbertraum des Systems bis auf eine Phase dargestellt ist. Falls die Darstellung außerdem mit dem Hamiltonoperator vertauscht, spricht man von einer Symmetriegruppe des Hamiltonoperators.

Hinweis: siehe auch Vorlesungsmanuskript QM2 von Jakob Yngvason.