

# Streutheorie

Helmut Neufeld  
Fakultät für Physik  
Universität Wien

Sommersemester 2014

## **Zusammenfassung**

Streuexperimente erlauben die Untersuchung der atomaren und subatomaren Struktur der Materie. Die Grundidee der Bestimmung eines Wirkungsquerschnitts wird anhand eines einfachen klassischen Modells erläutert. Die Abseparation der Massenmittelpunktsbewegung bei der Kollision zweier Teilchen führt auf das Problem der Streuung eines Teilchens in einem äußeren Potential. Im Rahmen der zeitabhängigen Streutheorie werden die Møller-Operatoren und der Streuoperator eingeführt. Das Konzept des Wirkungsquerschnitts wird auf den quantenmechanischen Fall erweitert. Der Übergang von der zeitabhängigen zur zeitunabhängigen Streutheorie liefert leicht handhabbare Formeln für die Berechnung von Streuamplituden. Die Bornsche Reihe gestattet eine näherungsweise Berechnung der Streuamplitude bei nicht zu starker Wechselwirkung. Als Anwendungsbeispiel wird die Streuung in einem Yukawapotential behandelt, als deren Grenzfall sich die Rutherfordstreuung ergibt. Das Wechselwirkungsbild führt auf eine Darstellung des S-Operators als zeitgeordnete Exponentialfunktion des Zeitintegrals des Wechselwirkungspotentials. Feynmandiagramme und Feynmanregeln werden für den Fall der Potentialstreuung diskutiert. Ein radialsymmetrisches Potential gestattet die Partialwellenentwicklung der Streuamplitude, die gesamte Information über den Streuprozess steckt in diesem Fall in den Streuphasen.

# 1 Klassischer Wirkungsquerschnitt

Abbildung 1 illustriert die Idee der Bestimmung eines Wirkungsquerschnitts. Ein punktförmiges Projektil wird  $N$ -mal mit zufallsverteilterm **Stoßparameter** (impact parameter)  $\vec{\rho}$  (verteilt über eine Fläche  $F$ , die größer ist als die Abmessungen des zu untersuchenden Objekts) auf ein starres Untersuchungsobjekt geschossen. Werden von den  $N$  einlaufenden Teilchen  $N_{\text{gestr}}$  gestreut, so wird der **totale**

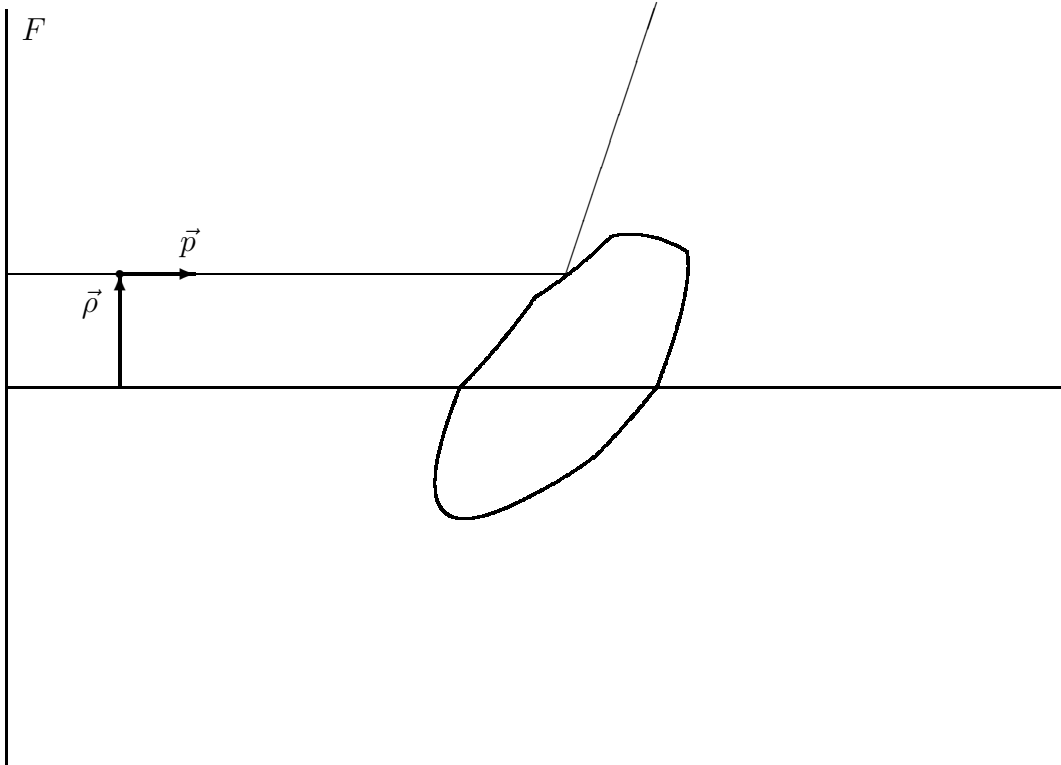


Abbildung 1: Streuung eines Punkteilchens mit Anfangsimpuls  $\vec{p}$  und Stoßparameter  $\vec{\rho}$  an starren Objekt.

**Wirkungsquerschnitt**  $\sigma$  durch die Gleichung

$$\frac{N_{\text{gestr}}}{N} = \frac{\sigma}{F}, \quad N_{\text{gestr}} = \underbrace{\frac{N}{F}}_n \sigma,$$

definiert, wobei  $n = N/F$  die Anzahl der einlaufenden Teilchen pro Fläche bezeichnet.

**Bemerkung:** Im hier diskutierten Fall ist  $\sigma$  einfach der geometrische Querschnitt des Objekts  $\perp \vec{p}$ .

Man kann aus diesem Experiment noch mehr Information gewinnen, wenn man nicht nur registriert, ob ein Teilchen abgelenkt wurde oder nicht, sondern auch

die Winkelverteilung der gestreuten Teilchen bestimmt. Bezeichnet man mit  $N_{\text{gestr}}(\Delta\Omega)$  die Anzahl der in den Raumwinkel  $\Delta\Omega$  gestreuten Teilchen, so erhält man durch  $N_{\text{gestr}}(\Delta\Omega) = n\sigma(\Delta\Omega)$  den Anteil  $\sigma(\Delta\Omega)$  des Wirkungsquerschnitts der in  $\Delta\Omega$  gestreuten Teilchen. Für ein infinitesimales Raumwinkelelement  $d\Omega$  definiert dies den **differentiellen Wirkungsquerschnitt**  $d\sigma/d\Omega$ :

$$\sigma(d\Omega) = \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega.$$

## 2 Zeitabhängige Streutheorie

In der Praxis wird natürlich nicht ein punktförmiges Projektil an einem starren Erdapfel gestreut, sondern man betrachtet i. Allg. die Bewegung zweier Teilchen, die aufeinander eine durch ein Wechselwirkungspotential  $V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$  beschriebene Kraft ausüben. Üblicherweise nimmt man an, dass die Wechselwirkung für großen Relativabstand  $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$  der beiden Teilchen verschwindet, oder wenigstens so stark abfällt, dass sich die Teilchen lange Zeit **vor** und lange Zeit **nach** der Wechselwirkung wie **freie** Teilchen verhalten.<sup>1</sup>

Wie üblich, lässt sich dieses Zweiteilchenproblem durch Abspalten der Massenzentrumsbewegung auf ein Einteilchenproblem reduzieren, also die Bewegung eines Teilchens mit reduzierter Masse  $m$  in einem äußeren Potential  $V(r)$ . Wir gehen also von einem Hamiltonoperator der Form

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(r)$$

auf  $\mathcal{H} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{R}$  aus und interessieren uns für die quantenmechanische Behandlung des dazugehörigen Streuproblems (Potentialstreuung). Dabei bezeichnet  $\mathcal{B}$  den von den Bindungszuständen aufgespannten linearen Unterraum und  $\mathcal{R} = \mathcal{B}^\perp$  das orthogonale Komplement von  $\mathcal{B}$ .

Wir nehmen nun an, dass wir einen Zustandsvektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  gefunden haben, dessen Zeitentwicklung (im Schrödingerbild) sich für  $t \rightarrow \pm\infty$  der freien Zeitentwicklung annähert, das heißt, dass Vektoren  $|\psi_\pm\rangle$  existieren, sodass

$$\|e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle - e^{-iH_0t/\hbar}|\psi_\pm\rangle\| \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0, \quad H_0 = \vec{P}^2/2m.$$

Die vorliegende Situation wird in Abbildung 2 in einer **symbolischen** Darstellung illustriert. Punkte in der Ebene entsprechen dabei Vektoren im Hilbertraum.

**Bemerkung:** Dieses asymptotische Verhalten ist natürlich nur für  $|\psi\rangle \in \mathcal{R}$  möglich, da sich die Zeitentwicklung  $\exp(-iHt/\hbar)|\phi_n\rangle = \exp(-iE_n t/\hbar)|\phi_n\rangle$  eines Bindungszustands  $|\phi_n\rangle \in \mathcal{B}$  **nie** der freien Zeitentwicklung annähert.

<sup>1</sup>Genauer: Dass sich die Zeitentwicklung jener von freien Teilchen asymptotisch annähert.

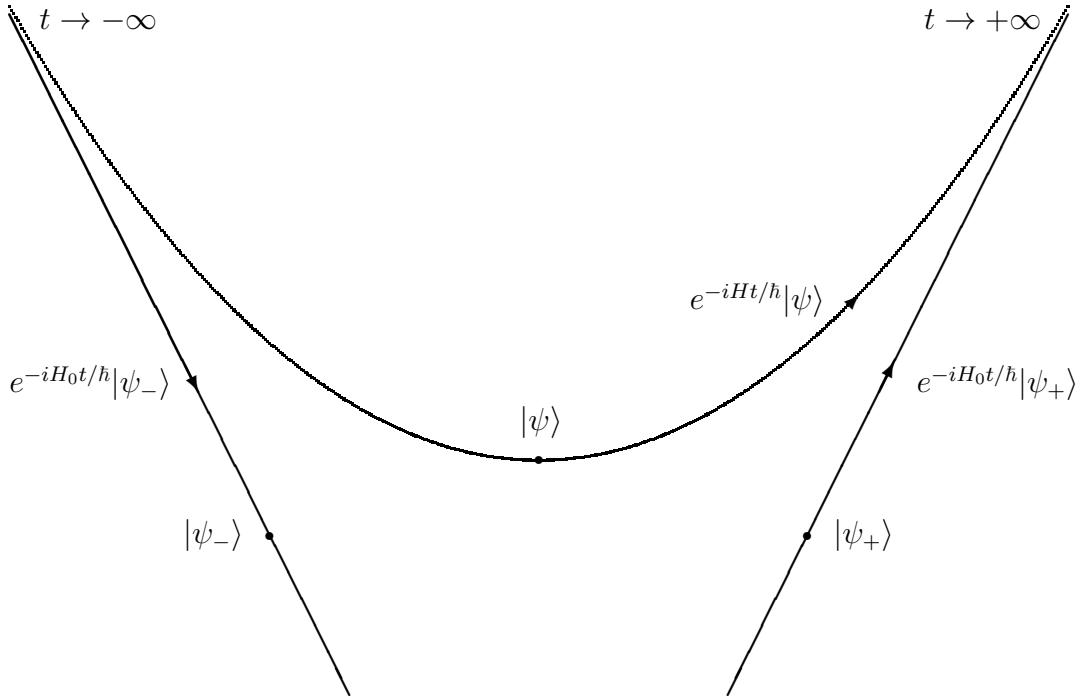


Abbildung 2: Symbolische Darstellung der Zeitentwicklung eines Zustands im Hilbertraum und der asymptotischen Annäherung an die freie Bewegung.

Bezeichnet man mit  $\mathcal{H}_{\text{ein}}$  den Raum aller  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , deren Zeitentwicklung sich für  $t \rightarrow -\infty$  der freien Zeitentwicklung annähert und, analog, mit  $\mathcal{H}_{\text{aus}}$  den Raum aller  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , deren Zeitentwicklung sich für  $t \rightarrow +\infty$  der freien Zeitentwicklung annähert, so gilt unter **geeigneten Voraussetzungen** an  $V$ , dass  $\mathcal{H}_{\text{ein}} = \mathcal{H}_{\text{aus}} = \mathcal{R}$  gilt. Man spricht in diesem Fall von **asymptotischer Vollständigkeit** und wir werden im Folgenden annehmen, dass diese Bedingung erfüllt ist. Es gibt dann zu **jedem**  $|\psi\rangle \in \mathcal{R}$  (eindeutig bestimmte) Vektoren  $|\psi_{\pm}\rangle \in \mathcal{H}$  mit der Eigenschaft

$$\|e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle - e^{-iH_0t/\hbar}|\psi_{\pm}\rangle\| \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\|e^{iH_0t/\hbar}e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle - |\psi_{\pm}\rangle\| \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$$

$\Leftrightarrow$

$$|\psi_{\pm}\rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_0t/\hbar}e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle$$

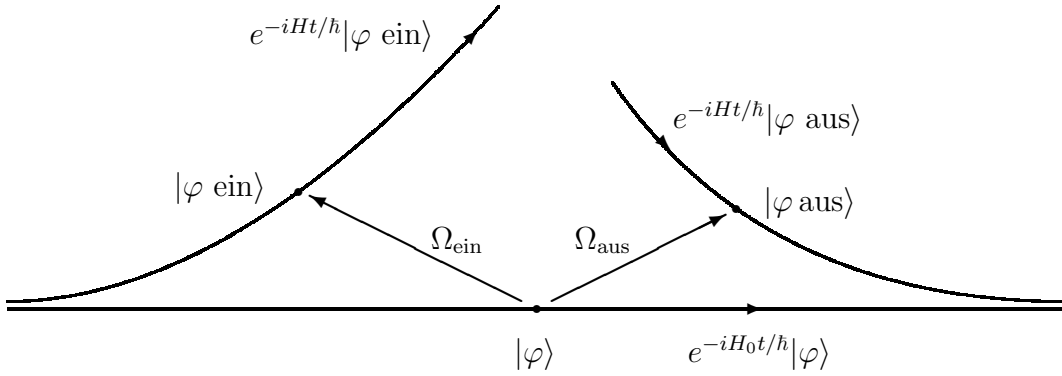


Abbildung 3: Bedeutung von  $|\varphi_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle$  und Wirkung der Møller-Operatoren  $\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}$ .

Umgekehrt kann man sich die Frage stellen, ob es zu **jedem**  $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$  Zustände  $|\varphi_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle$ , gibt, sodass

$$\|e^{-iHt/h}|\varphi_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle - e^{-iH_0t/h}|\varphi\rangle\| \xrightarrow[t \rightarrow \mp\infty]{} 0$$

gilt. In unserer symbolischen Darstellung hätten wir die in Abbildung 3 gezeigte Situation.

Man stellt sich also die Frage, ob die Limiten

$$|\varphi_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt/h} e^{-iH_0t/h} |\varphi\rangle$$

für alle  $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$  existieren, oder mit anderen Worten, ob die **Møller-Operatoren**

$$\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \underbrace{e^{iHt/h} e^{-iH_0t/h}}_{\Omega(t)}$$

auf **ganz**  $\mathcal{H}$  definiert sind.<sup>2</sup> Falls dies der Fall ist, sagt man, dass die **Asymptotenbedingung** erfüllt ist.<sup>3</sup> In diesem Fall haben wir also zu jedem  $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$  Vektoren

$$|\varphi_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} |\varphi\rangle \in \mathcal{R} = \mathcal{B}^\perp.$$

Die Situation ist in Abbildung 4 dargestellt.

Wie bereits angedeutet, ist die Existenz der oben angegebenen Limiten keineswegs selbstverständlich. Man muss bestimmte Forderungen an das Potential  $V(r)$

<sup>2</sup>Der starke Limes  $s\text{-}\lim A_n = A$  einer Folge von Operatoren  $\{A_n\}$  ist dadurch definiert, dass es einen Operator  $A$  gibt, sodass die Folge reeller Zahlen  $\{\|A_n|\psi\rangle - A|\psi\rangle\|$  für alle  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  gegen Null konvergiert.

<sup>3</sup>Eine hinreichende Bedingung wäre etwa  $V(r) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ .

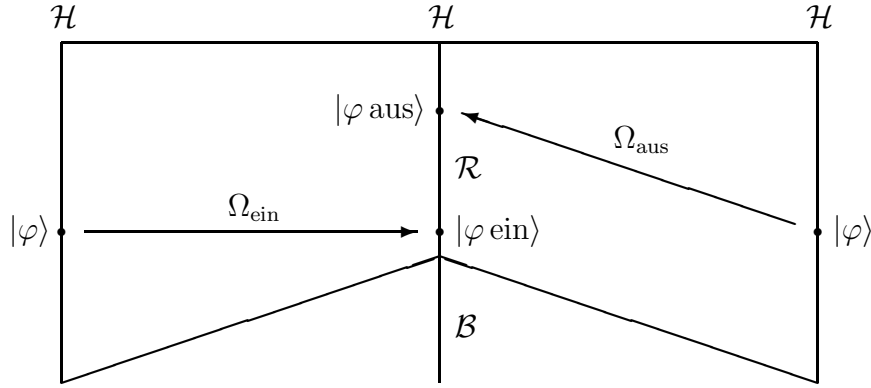


Abbildung 4: Wirkung der Møller-Operatoren  $\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}$  im Hilbertraum.

stellen. Dieses muss einerseits im Unendlichen stark genug abfallen, damit sich die Zeitentwicklung asymptotisch tatsächlich der freien Zeitentwicklung annähert. (Dies ist z.B. wegen seiner großen Reichweite für das Coulombpotential **nicht** erfüllt.) Andererseits darf das Potential für  $r \rightarrow 0$  nicht zu singularär werden, damit das Teilchen nicht „verschluckt“ wird.<sup>4</sup>

Die Operatoren  $\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}$  sind als (starke) Limiten des unitären Operators  $\Omega(t)$  **isometrisch** (d. h. die Norm eines Vektors wird durch Anwendung von  $\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}$  nicht geändert), sie sind jedoch (außer im Fall  $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ ) **nicht** unitär,

$$\begin{aligned} \langle \Omega(t) \chi | \Omega(t) \varphi \rangle &= \langle \chi | \varphi \rangle \quad \forall |\chi\rangle, \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H} \\ \Rightarrow \langle \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \chi | \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \varphi \rangle &= \langle \chi | \varphi \rangle \quad \forall |\chi\rangle, \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H} \\ \Rightarrow \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein} \dagger} \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} &= \mathbb{1}, \end{aligned}$$

daraus folgt aber **nicht**  $\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein} \dagger} = \mathbb{1}$ , wie dies in einem **endlichdimensionalen** unitären Raum der Fall wäre. Bei Anwesenheit von Bindungszuständen sind die Operatoren  $\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}$  nämlich **nicht surjektiv**:

$$\begin{aligned} \langle \chi | \underbrace{\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \varphi}_{\in \mathcal{R}} \rangle &= 0 \quad \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}, \forall |\chi\rangle \in \mathcal{B} \\ \Rightarrow \langle \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein} \dagger} \chi | \varphi \rangle &= 0 \quad \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}, \forall |\chi\rangle \in \mathcal{B} \\ \Rightarrow \langle \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein} \dagger} \chi | \varphi \rangle &= 0 \quad \forall |\chi\rangle \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein} \dagger} \mathcal{B} = 0. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Die mathematische Behandlung dieser Fragen finden Sie in dem Buch von Michael Reed, Barry Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 3, Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1979.

Andererseits lässt sich jedes  $|\psi\rangle \in \mathcal{R}$  in der Form  $|\psi\rangle = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} |\psi_{\mp}\rangle$  schreiben und man hat daher

$$\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \Omega_{\text{aus}}^{\dagger} |\psi\rangle = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \underbrace{\Omega_{\text{aus}}^{\dagger} \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}}_{\mathbb{1}} |\psi_{\mp}\rangle = |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{R},$$

also

$$\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \Omega_{\text{aus}}^{\dagger} \Big|_{\mathcal{B}} = 0, \quad \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \Omega_{\text{aus}}^{\dagger} \Big|_{\mathcal{R}} = \mathbb{1}_{\mathcal{R}}.$$

Beides kombiniert, ergibt

$$\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \Omega_{\text{aus}}^{\dagger} = \mathbb{1} - P_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{R}},$$

wobei  $P_{\mathcal{B}}$  und  $\mathcal{B}$  die Projektoren auf die Unterräume  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{R}$  sind.

### Bemerkungen:

1. Ein einfaches Beispiel eines Operators, der zwar isometrisch, aber nicht unitär ist, kann man so konstruieren: Es sei  $|0\rangle, |1\rangle, \dots$  ein vollständiges Orthonormalsystem eines unendlichdimensionalen Hilbertraums. Der Operator  $T$  sei durch

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|$$

definiert. Wegen  $T^{\dagger}T = \mathbb{1}$  ist  $T$  isometrisch. Allerdings ist  $T$  nicht surjektiv (der Vektor  $|0\rangle$  gehört nicht zum Bild von  $T$ ), dementsprechend ist  $T$  nicht unitär:

$$TT^{\dagger} = \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbb{1} - |0\rangle\langle 0|.$$

2. Wegen  $\Omega_{\text{aus}}^{\dagger} \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = \mathbb{1}$  kann man auch

$$\underbrace{|\varphi_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle}_{\in \mathcal{R}} = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} \underbrace{|\varphi\rangle}_{\in \mathcal{H}} \Rightarrow \Omega_{\text{aus}}^{\dagger} |\varphi_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle = |\varphi\rangle$$

schreiben, bzw.

$$\Omega_{\text{aus}}^{\dagger} \underbrace{|\psi\rangle}_{\in \mathcal{R}} = |\psi_{\mp}\rangle.$$

Die Operatoren  $\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}$  haben die weitere Eigenschaft, dass  $H\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}H_0$  ist. Aus

$$e^{iH\tau/\hbar}\Omega(t) = \Omega(t + \tau)e^{iH_0\tau/\hbar}$$

erhält man durch den Limes  $t \rightarrow \mp\infty$  die Beziehung

$$e^{iH\tau/\hbar}\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} e^{iH_0\tau/\hbar}$$

und durch Differentiation nach  $\tau$  erhalten wir

$$H\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} H_0.$$

Wegen  $\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}\dagger}\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = \mathbb{1}$  kann man auch

$$\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}\dagger} H\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = H_0$$

schreiben. Aus dieser Relation ist wieder ersichtlich, dass die Møller-Operatoren i. Allg. nicht unitär sein können. Denn wären sie dies, müssten  $H$  und  $H_0$  das gleiche Spektrum haben. Das heißt, nur wenn  $H$  keine Bindungszustände besitzt, können die Møller-Operatoren unitär sein.

### 3 Streuoperator

Die **Streumatrixelemente** ( $S$ -Matrixelemente)  $\langle\chi_{\text{aus}}|\varphi_{\text{ein}}\rangle$  gestatten die Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $|\langle\chi_{\text{aus}}|\varphi_{\text{ein}}\rangle|^2$  dafür, den Zustand  $|\chi_{\text{aus}}\rangle$  zu messen, wenn der Anfangszustand  $|\varphi_{\text{ein}}\rangle$  präpariert wurde (alles im Heisenbergbild). Wegen

$$|\varphi_{\text{ein}}\rangle = \Omega_{\text{ein}}|\varphi\rangle, \quad |\chi_{\text{aus}}\rangle = \Omega_{\text{aus}}|\chi\rangle$$

kann man das Streumatrixelement in der Form

$$\langle\chi_{\text{aus}}|\varphi_{\text{ein}}\rangle = \langle\chi|\underbrace{\Omega_{\text{aus}}^{\dagger}\Omega_{\text{ein}}}_S|\varphi\rangle$$

schreiben. Den Operator  $S = \Omega_{\text{aus}}^{\dagger}\Omega_{\text{ein}}$  nennt man **Streuoperator** oder  $S$ -Operator (der Wechseiwirkungsdarstellung).  $S$  ist ein auf **ganz**  $\mathcal{H}$  definierter **unitärer** Operator,

$$\begin{aligned} S^{\dagger}S &= \Omega_{\text{ein}}^{\dagger}\underbrace{\Omega_{\text{aus}}\Omega_{\text{aus}}^{\dagger}}_{P_{\mathcal{R}}}\Omega_{\text{ein}} = \Omega_{\text{ein}}^{\dagger}\Omega_{\text{ein}} = \mathbb{1}, \\ SS^{\dagger} &= \Omega_{\text{aus}}^{\dagger}\underbrace{\Omega_{\text{ein}}\Omega_{\text{ein}}^{\dagger}}_{P_{\mathcal{R}}}\Omega_{\text{aus}} = \Omega_{\text{aus}}^{\dagger}\Omega_{\text{aus}} = \mathbb{1}, \end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass das Bild von  $\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = \mathcal{R}$  ist. Aus

$$H\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} H_0$$



folgt

$$[S, H_0] = 0,$$

denn

$$SH_0 = \Omega_{\text{aus}}^\dagger \Omega_{\text{ein}} H_0 = \Omega_{\text{aus}}^\dagger H \Omega_{\text{ein}} = H_0 \Omega_{\text{aus}}^\dagger H \Omega_{\text{ein}} = H_0 S.$$

**Bemerkung:** Eine andere Möglichkeit besteht darin, den **nur** auf  $\mathcal{R}$  definierten Operator  $S_H$  ( $S$ -Operator der Heisenbergdarstellung) durch

$$S_H |\varphi \text{ aus}\rangle = |\varphi \text{ ein}\rangle$$

zu definieren. Das  $S$ -Matrixelement ist dann durch

$$\langle \chi \text{ aus} | \varphi \text{ ein}\rangle = \langle \chi \text{ aus} | S_H | \varphi \text{ aus}\rangle$$

gegeben.

$$\begin{aligned} |\varphi \text{ aus}\rangle &= \Omega_{\text{aus}} |\varphi\rangle \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{aus}}^\dagger |\varphi \text{ aus}\rangle = |\varphi\rangle \\ &\Rightarrow \quad \Omega_{\text{ein}} \Omega_{\text{aus}}^\dagger |\varphi \text{ aus}\rangle = \Omega_{\text{ein}} |\varphi\rangle = |\varphi \text{ ein}\rangle \\ &\Rightarrow \quad S_H = \Omega_{\text{ein}} \Omega_{\text{aus}}^\dagger \Big|_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

$S_H$  ist auf  $\mathcal{R}$  unitär, denn

$$\begin{aligned} S_H^\dagger S_H \Big|_{\mathcal{R}} &= \Omega_{\text{aus}} \underbrace{\Omega_{\text{ein}}^\dagger \Omega_{\text{ein}}}_{\mathbb{1}} \Omega_{\text{aus}}^\dagger \Big|_{\mathcal{R}} = \mathbb{1}_{\mathcal{R}}, \\ S_H S_H^\dagger \Big|_{\mathcal{R}} &= \Omega_{\text{ein}} \underbrace{\Omega_{\text{aus}}^\dagger \Omega_{\text{aus}}}_{\mathbb{1}} \Omega_{\text{ein}} \Big|_{\mathcal{R}} = \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Man kann die Definitionsgleichung für  $S_H$  auch in  $\langle \chi \text{ aus} | = \langle \chi \text{ ein} | S_H$  umschreiben, wodurch man für das  $S$ -Matrixelement

$$\langle \chi \text{ aus} | \varphi \text{ ein}\rangle = \langle \chi \text{ ein} | S_H | \varphi \text{ ein}\rangle$$

erhält. Es ist also egal, ob man  $S_H$  zwischen ein- oder aus-Zuständen nimmt.

Die gesamte Information über den eigentlichen Streuvorgang steckt in

$$\langle \chi | S | \varphi\rangle - \langle \chi | \varphi\rangle,$$

denn für  $V = 0$  ist  $S = \mathbb{1}$ . Durch zweimaliges Einschleiben des Einheitsoperators in der Form

$$\mathbb{1} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|$$

kann man das S-Matrixelement umschreiben,

$$\langle \chi | S | \varphi \rangle = \int d^3 p' d^3 p \underbrace{\langle \chi | \vec{p}' \rangle}_{\tilde{\chi}^*(\vec{p}')} \langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle \underbrace{\langle \vec{p} | \varphi \rangle}_{\tilde{\varphi}(\vec{p})}.$$

Durch die Aufspaltung  $S = \mathbb{1} + R$  erhält man

$$\langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) + \langle \vec{p}' | R | \vec{p} \rangle.$$

Wegen  $[H_0, S] = 0 \Leftrightarrow [H_0, R] = 0$  gilt

$$\langle \vec{p}' | [H_0, R] | \vec{p} \rangle = 0$$

und somit

$$(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}}) \langle \vec{p}' | R | \vec{p} \rangle = 0, \quad E_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m},$$

wodurch die Energieerhaltung während des Streuvorganges zum Ausdruck kommt (wir haben angenommen, dass der Hamiltonoperator nicht explizit zeitabhängig ist). Das Matrixelement  $\langle \vec{p}' | R | \vec{p} \rangle$  hat daher die Struktur

$$\langle \vec{p}' | R | \vec{p} \rangle = -2\pi i \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}}) T(\vec{p}', \vec{p}),$$

wobei die Funktion  $T(\vec{p}', \vec{p})$  nur für  $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$  definiert ist. Aus hier noch nicht ersichtlichen Gründen definiert man auch die **Streuamplitude**

$$f(\vec{p}', \vec{p}) = -(2\pi)^2 m \hbar T(\vec{p}', \vec{p}).$$

## 4 Wirkungsquerschnitt

Präpariert sei der Anfangszustand  $|\varphi \text{ ein}\rangle$ . Die Amplitude

$$\langle \vec{p}' \text{ aus} | \varphi \text{ ein} \rangle = \langle \vec{p}' | S | \varphi \rangle$$

gestattet die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, das Teilchen nach der Wechselwirkung mit dem Impuls  $\vec{p}'$  in einem Gebiet des Impulsraums der Größe  $d^3 p'$  anzutreffen:

$$\begin{aligned} w(|\varphi\rangle \rightarrow d^3 p') &= d^3 p' |\langle \vec{p}' | R | \varphi \rangle|^2 \\ \Rightarrow w(|\varphi\rangle \rightarrow d\Omega) &= d\Omega \int_0^\infty dp' (p')^2 |\langle \vec{p}' | R | \varphi \rangle|^2, \end{aligned}$$

$$\langle \vec{p}' | R | \varphi \rangle = \int d^3 q \langle \vec{p}' | R | \vec{q} \rangle \underbrace{\langle \vec{q} | \varphi \rangle}_{\tilde{\varphi}(\vec{q})}.$$

Dabei wollen wir annehmen, dass die Impulsraumwellenfunktion  $\tilde{\varphi}(\vec{q})$  scharf um den Wert  $\vec{q} = \vec{p}$  konzentriert ist. Dieses Experiment wird nun  $N$ -mal wiederholt (siehe Abschnitt 1). Natürlich wird ein Beschleuniger nicht immer wieder das gleiche Wellenpaket produzieren. Wir werden jedoch für den Augenblick annehmen, dass es möglich wäre Wellenpakete zu produzieren, die sich nur durch **zufallsverteilte Verschiebungen**  $\vec{\rho} \perp \vec{p}$  voneinander unterscheiden. Das Experiment wird also mit Anfangszuständen

$$|\varphi_{\vec{\rho}}\rangle = e^{-i\vec{\rho}\cdot\vec{P}/\hbar}|\varphi\rangle$$

$N$ -mal wiederholt, wobei die Stoßparameter  $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \dots, \vec{\rho}_N$  über die Fläche  $F$  zufallsverteilt sind. Für die Anzahl der in den Raumwinkel  $d\Omega$  gestreuten Teilchen

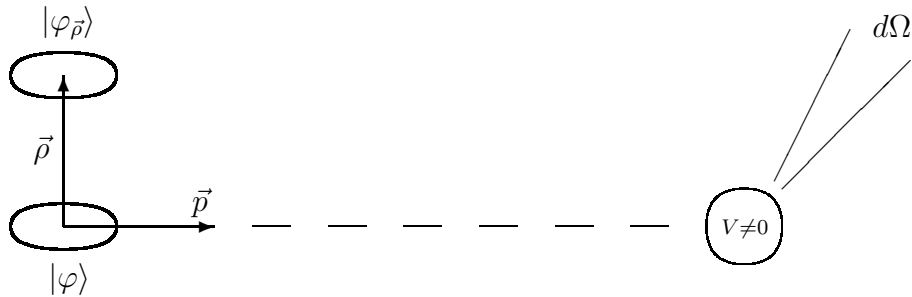


Abbildung 5: Einlaufende Wellenpakete im Ortsraum.

erhält man

$$\begin{aligned} N_{\text{gestr}}(d\Omega) &= \sum_{i=1}^N w(|\varphi_{\vec{\rho}_i}\rangle \rightarrow d\Omega) \\ &= \int_F d^2\rho \underbrace{\frac{N}{F}}_n w(|\varphi_{\vec{\rho}}\rangle \rightarrow d\Omega) \\ &\simeq n \int_{\mathbb{R}^2} d^2\rho w(|\varphi_{\vec{\rho}}\rangle \rightarrow d\Omega), \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Umformung verwendet wurde, dass  $w(|\varphi_{\rho}\rangle \rightarrow d\Omega)$  für große Werte von  $|\vec{\rho}|$  verschwindet. Somit erhält man (vgl. Abschnitt 1)

$$\sigma(|\varphi\rangle \rightarrow d\Omega) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\rho w(|\varphi_{\vec{\rho}}\rangle \rightarrow d\Omega),$$

wobei

$$w(|\varphi_{\vec{p}}\rangle \rightarrow d\Omega) = d\Omega \int_0^\infty dp' (p')^2 |\langle \vec{p}' | R | \varphi_{\vec{p}} \rangle|^2$$

mit

$$\langle \vec{p}' | R | \varphi_{\vec{p}} \rangle = \frac{i}{2\pi m \hbar} \int d^3q \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{q}}) f(\vec{p}', \vec{q}) e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{q} / \hbar} \tilde{\varphi}(\vec{q})$$

ist. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sigma(|\varphi\rangle \rightarrow d\Omega) &= \frac{d\Omega}{(2\pi m \hbar)^2} \int d^2\rho \int_0^\infty dp' (p')^2 \\ &\times \int d^3q \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{q}}) f(\vec{p}', \vec{q}) e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{q} / \hbar} \tilde{\varphi}(\vec{q}) \\ &\times \int d^3q' \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{q}'}) f(\vec{p}', \vec{q}')^* e^{i\vec{p}' \cdot \vec{q}' / \hbar} \tilde{\varphi}(\vec{q}')^*. \end{aligned}$$

Die zweidimensionale Integration über den Stoßparameter ergibt

$$\int d^2\rho e^{i\vec{p}' \cdot (\vec{q}' - \vec{q}) / \hbar} = (2\pi \hbar)^2 \delta^{(2)}(\vec{q}'_\perp - \vec{q}_\perp),$$

wobei

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

der auf  $\vec{p}$  normal stehende Anteil des Vektors  $\vec{a}$  ist. In dem Ausdruck für  $\sigma(|\varphi\rangle \rightarrow d\Omega)$  tritt daher das Produkt

$$\delta^{(2)}(\vec{q}'_\perp - \vec{q}_\perp) \underbrace{\delta(E_{\vec{q}'} - E_{\vec{q}})}_{2m\delta(q'^2 - q^2)} = \delta^{(2)}(\vec{q}'_\perp - \vec{q}_\perp) 2m\delta(q'^2 - q^2)$$

auf, wobei  $q^2 = q_\perp^2 + q_\parallel^2$  ist. Das Integral liefert daher nur für  $q'_\parallel = \pm q_\parallel$  einen nicht verschwindenden Beitrag. Ist die Wellenfunktion genügend schmal, so trägt die Lösung  $q'_\parallel = -q_\parallel$  nicht bei und die  $\delta$ -Funktionen wirken effektiv wie

$$\delta^{(2)}(\vec{q}'_\perp - \vec{q}_\perp) \delta(E_{\vec{q}'} - E_{\vec{q}}) = \delta^{(3)}(\vec{q}' - \vec{q}) \frac{m}{q_\parallel}.$$

Wir erhalten daher

$$\sigma(|\varphi\rangle \rightarrow d\Omega) = d\Omega \int d^3q \frac{|\vec{q}|}{q_\parallel} |f(\vec{p}', \vec{q})|^2 |\tilde{\varphi}(\vec{q})|^2, \quad |\vec{p}'| = |\vec{q}|.$$

Wir nehmen nun an, dass die Impulsraumwellenfunktion  $\tilde{\varphi}(\vec{q})$  so scharf um  $\vec{q} = \vec{p}$  konzentriert ist, dass sich in diesem Bereich die Funktion  $|f(\vec{p}', \vec{q})|^2 |\vec{q}|/q_{\parallel}$  praktisch nicht ändert. Man kann daher in diesem Teil des Integranden  $\vec{q}$  durch  $\vec{p}$  ersetzen und erhält das Resultat

$$\sigma(|\varphi\rangle \rightarrow d\Omega) = d\Omega |f(\vec{p}', \vec{p})|^2 \underbrace{\int d^3q}_{1} |\tilde{\varphi}(\vec{q})|^2,$$

welches unter den angegebenen Bedingungen **unabhängig** von der genauen Form von  $\tilde{\varphi}(\vec{q})$  ist. Wir können daher statt  $\sigma(|\varphi\rangle \rightarrow d\Omega)$  einfach  $\sigma(\vec{p}' \rightarrow d\Omega)$  schreiben. Weiters verwenden wir die Schreibweise

$$\sigma(\vec{p}' \rightarrow d\Omega) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{p}' \rightarrow \vec{p}') d\Omega$$

und somit als Endresultat für den differentiellen Wirkungsquerschnitts die Formel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{p}' \rightarrow \vec{p}') = |f(\vec{p}', \vec{p}')|^2.$$

**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass aus der Unitarität des  $S$ -Operators das **optische Theorem**

$$\text{Im } f(\vec{p}, \vec{p}) = \frac{|\vec{p}|}{4\pi\hbar} \sigma(\vec{p})$$

folgt, welches eine Beziehung zwischen dem Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude und dem totalen Wirkungsquerschnitt herstellt.

Hinweis: Schreiben Sie den  $S$ -Operator in der Form  $S = \mathbb{1} + R$ . Aus  $S^\dagger S = \mathbb{1}$  folgt dann  $R + R^\dagger = -R^\dagger R$ . Multiplizieren Sie diese Gleichung von links mit  $\langle \vec{p}' |$  und von rechts mit  $|\vec{p}\rangle$ . Nach einigen Umformungen gelangen Sie schließlich für  $\vec{p}' \rightarrow \vec{p}$  zu der oben angegebenen Formel.

## 5 Zeitunabhängige Streutheorie

Die Limiten  $t \rightarrow \pm\infty$  sind zwar konzeptuell durchsichtig, in der Praxis aber schwer zu handhaben. Man ersetzt sie daher unter Verwendung des folgenden Lemmas durch einen anderen Limes: Es sei  $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  mit  $\| |\psi(t)\rangle \| \leq C < \infty \forall t \in \mathbb{R}^+$  und

$$s\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt |\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt |\psi(t)\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty dt e^{-\varepsilon t} |\psi(t)\rangle.$$

Wir wenden diese Formel auf den Vektor

$$|\psi(t)\rangle = \frac{d}{dt} \underbrace{e^{iHt/\hbar} e^{-iH_0t/\hbar}}_{\Omega(t)} |\varphi\rangle$$

an.

Die Møller-Operatoren waren durch

$$\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = s\text{-}\lim_{T \rightarrow \mp\infty} \Omega(T)$$

definiert. Differentiation von  $\Omega(t)$  nach  $t$  ergibt

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} e^{iHt/\hbar} V e^{-iH_0t/\hbar},$$

woraus durch Integration

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} &= \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \lim_{T \rightarrow \mp\infty} \int_0^T dt e^{iHt/\hbar} V e^{-iH_0t/\hbar} \\ &= \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{\mp\infty} dt e^{\pm\varepsilon t} e^{iHt/\hbar} V e^{-iH_0t/\hbar} \end{aligned}$$

folgt. Man muss sich diesen Ausdruck auf einen normierbaren Vektor

$$|\varphi\rangle = \int d^3p |\vec{p}\rangle \langle \vec{p} | \varphi \rangle$$

angewendet denken, wobei

$$\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} |\vec{p}\rangle = |\vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle = |\vec{p}\rangle + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \underbrace{\frac{1}{E_{\vec{p}} \pm i\varepsilon - H}}_{G(E_{\vec{p}} \pm i\varepsilon)} V |\vec{p}\rangle.$$

Der hier auftretende **Greensche Operator**

$$G(z) = \frac{1}{z - H}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H),$$

wird in der Mathematik als Resolvente von  $H$  bezeichnet. Wegen der Gleichung  $(z - H)G(z) = \mathbb{1}$  gilt

$$\left(z + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x - V(\vec{x})\right) \langle \vec{x} | G(z) | \vec{x}' \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').$$

Wir wenden nun die Beziehung

$$A^{-1} = B^{-1} + B^{-1}(B - A)A^{-1}$$

auf  $A = z - H$ ,  $B = z - H_0$  an,

$$\underbrace{\frac{1}{z - H}}_{G(z)} = \underbrace{\frac{1}{z - H_0}}_{G_0(z)} + \frac{1}{z - H_0} V \frac{1}{z - H}$$

und erhalten auf diese Weise die **Lippmann-Schwinger-Gleichung** für  $G(z)$ :

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)VG(z).$$

Eingesetzt in

$$|\vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle = |\vec{p}\rangle + G(E_{\vec{p}} \pm i\varepsilon)V|\vec{p}\rangle$$

ergibt dies die Lippmann-Schwinger-Gleichung für  $|\vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle$ :

$$|\vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle = |\vec{p}\rangle + G_0(E_{\vec{p}} \pm i\varepsilon)V|\vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle.$$

**Bemerkung:** Wegen  $H\Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}} = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}H_0$  und  $|\vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle = \Omega_{\text{aus}}^{\text{ein}}|\vec{p}\rangle$  ist  $|\vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle$  ein (nicht normierbarer) Eigenvektor von  $H$  zum Eigenwert  $E_{\vec{p}} = \vec{p}^2/2m$ .

Wie sieht der Vektor  $|\vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}}\rangle$  in der **Ortsdarstellung** aus? Dazu müssen wir

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}} \rangle &= \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle + \int d^3x' \langle \vec{x} | G_0(E_{\vec{p}} \pm i\varepsilon) V(\vec{X}) | \vec{x}' \rangle \langle \vec{x}' | \vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}} \rangle \\ &= \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle + \int d^3x' \langle \vec{x} | G_0(E_{\vec{p}} \pm i\varepsilon) | \vec{x}' \rangle V(\vec{x}') \langle \vec{x}' | \vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}} \rangle \end{aligned}$$

berechnen.

**Aufgabe:** Zeigen Sie:

$$\langle \vec{x} | G_0(z) | \vec{x}' \rangle = -\frac{me^{i\sqrt{2mz}|\vec{x}-\vec{x}'|/\hbar}}{2\pi\hbar^2|\vec{x}-\vec{x}'|}, \quad z \notin \sigma(H_0) = \mathbb{R}^+, \quad \text{Im}\sqrt{z} \geq 0.$$

Hinweis: Nach Durchführung der Winkelintegration erhalten Sie ein eindimensionales Integral, das Sie mit Hilfe des Residuensatzes berechnen können.

In dem uns interessierenden Fall hat man daher

$$\langle \vec{x} | G_0(E_{\vec{p}} \pm i\varepsilon) | \vec{x}' \rangle = -\frac{me^{\pm i|\vec{p}||\vec{x}-\vec{x}'|/\hbar}}{2\pi\hbar^2|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

und erhält somit die folgende **Integralgleichung** für  $\langle \vec{x} | \vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}} \rangle$ :

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}} \rangle = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{\pm i|\vec{p}||\vec{x}-\vec{x}'|/\hbar}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} V(\vec{x}') \langle \vec{x}' | \vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}} \rangle.$$

Es handelt sich also um eine ebene Welle plus eine Superposition von (richtungsabhängigen)  $\vec{p}_{\text{ein}}^{\text{aus}}$ -laufenden Kugelwellen. Interessiert man sich für die Wellenfunktion in weiter Entfernung vom Streuzentrum ( $r = |\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ ), so kann man die Näherung

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = r - \vec{n} \cdot \vec{x}' + \mathcal{O}(1/r), \quad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$$

verwenden und erhält

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left[ e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} + \frac{e^{i|\vec{p}|r/\hbar}}{r} f(\vec{p}', \vec{p}) + \mathcal{O}(1/r^2) \right],$$

$$f(\vec{p}', \vec{p}) = -(2\pi)^2 m \hbar \langle \vec{p}' | V | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle, \quad \vec{p}' = |\vec{p}| \vec{n}.$$

Wie wir uns gleich überzeugen werden, stimmt  $f(\vec{p}', \vec{p})$  natürlich mit der schon früher definierten Funktion überein. Ausgedrückt durch  $T(\vec{p}', \vec{p})$  entspricht der hier angegebene Zusammenhang gerade

$$T(\vec{p}', \vec{p}) = \langle \vec{p}' | V | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle.$$

Um dies zu sehen, stellen wir den Zusammenhang mit dem  $S$ -Matrixelement her:

$$\langle \vec{p}'_{\text{aus}} | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle = \langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle.$$

Der relevante Teil ist

$$\langle \vec{p}'_{\text{aus}} | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle - \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) = \langle \vec{p}'_{\text{aus}} | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle - \langle \vec{p}'_{\text{ein}} | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle.$$

Andererseits wissen, dass

$$|\vec{p}_{\text{aus}}^{\text{ein}} \rangle = |\vec{p} \rangle + G(E_{\vec{p}} \pm i\varepsilon) V |\vec{p} \rangle$$

ist, woraus

$$|\vec{p}_{\text{aus}} \rangle - |\vec{p}_{\text{ein}} \rangle = [G(E_{\vec{p}} - i\varepsilon) - G(E_{\vec{p}} + i\varepsilon)] V |\vec{p} \rangle$$

folgt und schließlich

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}'_{\text{aus}} | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle - \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) &= \langle \vec{p}' | V [G(E_{\vec{p}'} + i\varepsilon) - G(E_{\vec{p}'} - i\varepsilon)] | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle \\ &= \underbrace{\left( \frac{1}{E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}} + i\varepsilon} - \frac{1}{E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}} - i\varepsilon} \right)}_{-2\pi i \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}})} \langle \vec{p}' | V | \vec{p}_{\text{ein}} \rangle. \end{aligned}$$



**Bemerkung:** Bei der Umformung des Ausdrucks in großen runden Klammern wurde die Formel

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \text{H} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$$

verwendet.

Man erhält also tatsächlich das Ergebnis

$$\langle \vec{p}' \text{ aus} | \vec{p} \text{ ein} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) - 2\pi i \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}}) \langle \vec{p}' | V | \vec{p} \text{ ein} \rangle,$$

was durch Vergleich mit der am Ende von Abschnitt 3 angegebenen Definition die Relation  $T(\vec{p}', \vec{p}) = \langle \vec{p}' | V | \vec{p} \text{ ein} \rangle$ , bestätigt.

## 6 Bornsche Reihe

Definiert man den Operator

$$T(z) = V + VG(z)V, \quad z \in \mathbb{C},$$

so kann man  $T(\vec{p}', \vec{p})$  in der Form

$$T(\vec{p}', \vec{p}) = \langle \vec{p}' | T(E_{\vec{p}} + i\varepsilon) | \vec{p} \rangle$$

schreiben, denn

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | T(E_{\vec{p}} + i\varepsilon) | \vec{p} \rangle &= \langle \vec{p}' | V + VG(E_{\vec{p}} + i\varepsilon)V | \vec{p} \rangle \\ &= \langle \vec{p}' | V \underbrace{(\mathbb{1} + G(E_{\vec{p}} + i\varepsilon)V)}_{| \vec{p} \text{ ein} \rangle} | \vec{p} \rangle \\ &= \langle \vec{p}' | V | \vec{p} \text{ ein} \rangle. \end{aligned}$$

Man kann nun die Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)VG(z)$$

**iterieren** und erhält eine **Störungsreihe** für  $G(z)$ :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (G_0(z)V)^n G_0(z).$$

Eingesetzt in den Ausdruck für  $T(z)$  ergibt dies die Störungsreihe

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (VG_0(z))^{n-1} V = \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n)}(z)$$

und damit die **Bornsche Reihe** für die  $T$ -Matrixelemente

$$T(\vec{p}', \vec{p}) = \langle \vec{p}' | T(E_{\vec{p}} + i\varepsilon) | \vec{p} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\langle \vec{p}' | (VG_0(E_{\vec{p}} + i\varepsilon))^{n-1} V | \vec{p} \rangle}_{T^{(n)}(\vec{p}', \vec{p})},$$

sowie in weiterer Folge für die Streuamplitude

$$f(\vec{p}', \vec{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(\vec{p}', \vec{p}), \quad f^{(n)}(\vec{p}', \vec{p}) = -(2\pi)^2 m \hbar T^{(n)}(\vec{p}', \vec{p}).$$

Als führenden Term in dieser Entwicklung erhält man

$$f^{(1)}(\vec{p}', \vec{p}) = -(2\pi)^2 m \hbar \underbrace{\langle \vec{p}' | V | \vec{p} \rangle}_{T^{(1)}(\vec{p}', \vec{p})} = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3x e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x} / \hbar} V(\vec{x}),$$

also bis auf einen geeigneten Vorfaktor einfach die Fouriertransformierte des Potentials.

Für den nächsten Born-Term erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\vec{p}', \vec{p}) &= -(2\pi)^2 m \hbar \underbrace{\langle \vec{p}' | VG_0(E_{\vec{p}} + i\varepsilon) V | \vec{p} \rangle}_{T^{(2)}(\vec{p}', \vec{p})} \\ &= -(2\pi)^2 m \hbar \int d^3p_1 \langle \vec{p}' | V | \vec{p}_1 \rangle \frac{1}{E_{\vec{p}} + i\varepsilon - E_{\vec{p}_1}} \langle \vec{p}_1 | V | \vec{p} \rangle. \end{aligned}$$

## 7 Yukawapotential und Rutherfordstreuung

**Aufgabe:** Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchens in dem Yukawapotential

$$V(\vec{x}) = \gamma \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad r = |\vec{x}|$$

in niedrigster Bornscher Näherung.

**Lösung:**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{2m\gamma}{\vec{q}^2 + \hbar^2 \kappa^2} \right)^2, \quad \vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}.$$

Drückt man  $|\vec{q}|$  durch den Betrag des Impulses und den Streuwinkel  $\theta$  aus,

$$|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \sin \frac{\theta}{2},$$

so kann man die Streuformel auch in der Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{2m\gamma}{4\vec{p}^2 \sin^2 \theta/2 + \hbar^2 \kappa^2} \right)^2$$

schreiben.

Für  $\kappa = 0$  und  $\gamma = Z_1 Z_2 e^2$  erhält man die **Rutherford'sche Streuformel**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{mZ_1 Z_2 e^2}{2\vec{p}^2 \sin^2 \theta/2} \right)^2.$$

## 8 Wechselwirkungsbild

Wir zerlegen den Hamiltonoperator  $H$  eines quantenmechanischen Systems in eine Summe aus einem „freien“ Teil  $H_0$  und einem „Wechselwirkungsteil“  $V$ :  $H = H_0 + V$ . Der Einfachheit halber sei angenommen, dass sowohl  $H_0$  als auch  $V$  nicht explizit von der Zeit abhängen.<sup>5</sup> Das **Wechselwirkungsbild** ist dadurch definiert, dass die Zeitentwicklung von Zustandsvektoren gemäß

$$|\psi_W(t)\rangle := e^{iH_0 t/\hbar} |\psi_S(t)\rangle$$

erfolgt, wobei die Abkürzungen „W“ für „Wechselwirkungsbild“ und „S“ für „Schrödingerbild“ stehen. Für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator  $H$  (der von uns betrachtete Fall) bedeutet dies einfach

$$|\psi_W(t)\rangle = e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iH t/\hbar} |\psi_S(0)\rangle = e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iH t/\hbar} |\psi_H\rangle.$$

Die Zeitentwicklung von Operatoren im Wechselwirkungsbild,

$$A_W(t) = e^{iH_0 t/\hbar} A_S e^{-iH_0 t/\hbar} = e^{iH_0 t/\hbar} A_H(0) e^{-iH_0 t/\hbar},$$

ist dadurch festgelegt, dass die Zeitabhängigkeit der entsprechenden Erwartungswerte nicht vom verwendeten Bild abhängen darf:

$$\langle \psi_W(t) | A_W(t) | \psi_W(t) \rangle = \langle \psi_S(t) | A_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_H | A_H(t) | \psi_H \rangle.$$

Während der unitäre Operator, welcher die Zeitentwicklung vom Anfangszeitpunkt  $t_0$  zum Endzeitpunkt  $t$  beschreibt, im Schrödingerbild durch

$$U_S(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$$

gegeben ist, lautet der entsprechende Operator im Wechselwirkungsbild:

$$U_W(t, t_0) = e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iH(t-t_0)/\hbar} e^{-iH_0 t_0/\hbar}.$$

---

<sup>5</sup>Die Verallgemeinerung auf den Fall  $V = V(t)$  ist sehr einfach und sei dem Leser überlassen.

$U_W(t, t_0)$  erfüllt die Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_W(t, t_0) = V_W(t) U_W(t, t_0),$$

wobei

$$V_W(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar}$$

mit  $V \equiv V_S$ . Integriert man diese Gleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung  $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ , so ergibt sich die Integralgleichung

$$U_W(t, t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau V_W(\tau) U_W(\tau, t_0).$$

Durch Iteration erhält man

$$U_W(t, t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau V_W(\tau) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t d\tau' \int_{t_0}^{\tau'} d\tau V_W(\tau') V_W(\tau) + \dots$$

Wir bemerken, dass die Integration in dem zweiten Integral über eine Dreiecksfläche verläuft, in der  $t_0 < \tau < \tau' < t$  gilt, d.h. der linksstehende Operator ist mit einem späteren Zeitpunkt verknüpft als der rechtstehende. Man kann dieses Integral daher mit Hilfe des Zeitordnungssymbols  $T$  in der Form

$$\int_{t_0}^t d\tau' \int_{t_0}^{\tau'} d\tau V_W(\tau') V_W(\tau) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau' \int_{t_0}^t d\tau T(V_W(\tau') V_W(\tau))$$

schreiben, wobei sich die Integration in dem Ausdruck auf der rechten Seite nunmehr über das gesamte Rechteck  $[t_0, t] \times [t_0, t]$  erstreckt. An dieser Stelle sei an die Definition des zeitgeordneten Produkts zweier Operatoren  $A(\tau')$  und  $B(\tau)$  erinnert:

$$T(A(\tau') B(\tau)) := \begin{cases} A(\tau') B(\tau) & \text{falls } \tau' > \tau \\ B(\tau) A(\tau') & \text{falls } \tau > \tau' \end{cases}.$$

Im allgemeinen Fall eines  $n$ -dimensionalen Integrals hat man

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t d\tau_n \int_{t_0}^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots \int_{t_0}^{\tau_3} d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 V_W(\tau_n) V_W(\tau_{n-1}) \dots V_W(\tau_2) V_W(\tau_1) \\ &= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t d\tau_n \int_{t_0}^t d\tau_{n-1} \dots \int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^t d\tau_1 T(V_W(\tau_n) V_W(\tau_{n-1}) \dots V_W(\tau_2) V_W(\tau_1)) \end{aligned}$$

mit

$$T(V_W(\tau_n)V_W(\tau_{n-1})\dots V_W(\tau_2)V_W(\tau_1)) = V_W(\tau_{i_n})V_W(\tau_{i_{n-1}})\dots V_W(\tau_{i_2})V_W(\tau_{i_1}),$$

wobei  $i_1, \dots, i_n$  jene Permutation von  $1, \dots, n$  ist, für die  $\tau_{i_n} > \dots > \tau_{i_1}$  gilt.

Somit ist der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild durch

$$\begin{aligned} U_W(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i/\hbar)^n}{n!} \int_{t_0}^t d\tau_n \dots \int_{t_0}^t d\tau_1 T(V_W(\tau_n) \dots V_W(\tau_1)) \\ &=: T \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau V_W(\tau) \right) \end{aligned}$$

gegeben, wobei der Ausdruck in der unteren Zeile eine kompakte Kurzschreibweise für die unendliche Summe der Integrale über die zeitgeordneten Produkte darstellt.

Die Nützlichkeit des Wechselwirkungsbildes in der Streutheorie ergibt sich daraus, dass man aus  $U_W(t, t_0)$  im Limes  $t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty$  den Streuoperator

$$S = U_W(+\infty, -\infty) = T \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V_W(\tau) \right)$$

und in weiterer Folge eine alternative Berechnungsmethode der Bornschen Reihe erhält:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle &= \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \vec{p}' | e^{iE_{\vec{p}'}\tau/\hbar} V e^{-iE_{\vec{p}}\tau/\hbar} | \vec{p} \rangle \\ &\quad + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau \langle \vec{p}' | e^{iE_{\vec{p}'}\tau'/\hbar} V e^{-iH_0(\tau'-\tau)/\hbar} V e^{-iE_{\vec{p}}\tau/\hbar} | \vec{p} \rangle + \dots \\ &= \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) + \langle \vec{p}' | S^{(1)} | \vec{p} \rangle + \langle \vec{p}' | S^{(2)} | \vec{p} \rangle + \dots \end{aligned}$$

Der Term erster Ordnung  $\langle \vec{p}' | S^{(1)} | \vec{p} \rangle$  in der Störungsreihe ist das Integral über alle Zeiten  $\tau$  des Matrixelements

$$\langle \vec{p}' | e^{iE_{\vec{p}'}\tau/\hbar} (-iV/\hbar) e^{-iE_{\vec{p}}\tau/\hbar} | \vec{p} \rangle,$$

was die folgende anschauliche Interpretation nahelegt: das Teilchen bewegt sich zunächst frei mit dem Impuls  $\vec{p}$  bis zum Zeitpunkt  $\tau$ . (Das entspricht dem Faktor  $\exp(-iE_{\vec{p}}\tau/\hbar)|\vec{p}\rangle$ .) Zum Zeitpunkt  $\tau$  erhält es durch das Potential einen Stoß

(entspricht dem Faktor  $-iV/\hbar$ ) und bewegt sich wieder frei mit dem Impuls  $\vec{p}'$  weiter (Faktor  $\langle \vec{p}' | \exp(iE_{\vec{p}'}\tau/\hbar)$ ). Diese Abfolge von Ereignissen kann man durch das in Abbildung 6 gezeigte linke **Feynmandiagramm** illustrieren. Da nicht feststellbar ist zu welchem Zeitpunkt  $\tau$  die Wechselwirkung mit dem Potential stattfindet, muss schließlich noch über den Bereich aller möglichen Werte von  $\tau$  integriert werden.

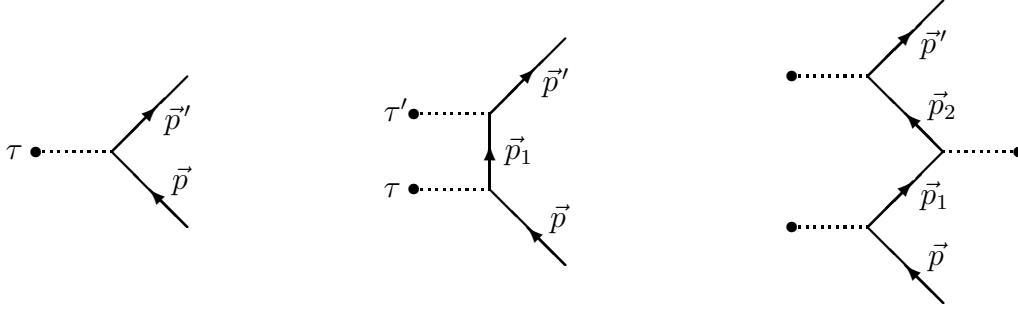


Abbildung 6: Graphische Darstellung von Termen der Störungsreihenentwicklung.

Zur Interpretation des zweiten Terms der Störungsentwicklung schieben wir den Einheitsoperator in der Form

$$\mathbb{1} = \int d^3 p_1 |\vec{p}_1\rangle \langle \vec{p}_1|$$

ein und erhalten

$$\langle \vec{p}' | S^{(2)} | \vec{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau \int d^3 p_1 e^{iE_{\vec{p}'}\tau'/\hbar} \langle \vec{p}' | \frac{-iV}{\hbar} | \vec{p}_1 \rangle e^{-iE_{\vec{p}_1}(\tau'-\tau)/\hbar} \langle \vec{p}_1 | \frac{-iV}{\hbar} | \vec{p} \rangle e^{-iE_{\vec{p}}\tau/\hbar}.$$

Die physikalische Interpretation ist offensichtlich: das Teilchen bewegt sich bis zur Zeit  $\tau$  mit dem Impuls  $\vec{p}$ , wird dann durch das Potential  $V$  in einen „Zwischenzustand“ mit dem Impuls  $\vec{p}_1$  befördert um schließlich zum Zeitpunkt  $\tau'$  durch eine nochmalige Wechselwirkung mit dem Potential im Endzustand mit dem Impuls  $\vec{p}'$  zu landen. Da weder  $\tau$  und  $\tau'$  noch  $\vec{p}_1$  beobachtet werden, muss über alle diese Größen integriert werden, wobei  $-\infty < \tau < \tau' < \infty$  zu beachten ist. Dieser Beitrag zur Streuamplitude wird durch das mittlere Diagramm in Abbildung 6 dargestellt.

Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass unsere Entwicklung tatsächlich mit der bereits in Abschnitt 6 diskutierten Bornschen Reihe übereinstimmt. Tatsächlich ergibt

$$\langle \vec{p}' | S^{(1)} | \vec{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}})\tau/\hbar} \langle \vec{p}' | (-iV/\hbar) | \vec{p} \rangle = -2\pi i \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}}) \langle \vec{p}' | V | \vec{p} \rangle,$$

was genau dem Beitrag des ersten Born-Terms

$$T^{(1)}(\vec{p}', \vec{p}) = \langle \vec{p}' | V | \vec{p} \rangle$$

zu

$$\langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) - 2\pi i \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}}) T(\vec{p}', \vec{p})$$

entspricht.

Bei der Umformung des zweiten Terms  $\langle \vec{p}' | S^{(2)} | \vec{p} \rangle$  muss man sich erinnern, dass man eigentlich ein Matrixelement mit **normierten** Zuständen (also  $\langle \chi | S^{(2)} | \varphi \rangle$ ) berechnen sollte. Man sieht dann mit Hilfe des in Abschnitt 5 angegebenen Lemmas leicht, dass man in dem an sich nicht definierten Integral über  $\tau$  nur einen konvergenzerzeugenden Faktor einführen muss, um dann wieder fröhlich mit den nichtnormierbaren Impulseigenzuständen weiterrechnen zu können:

$$\int_{-\infty}^{\tau'} d\tau e^{\varepsilon\tau} e^{i(E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}})\tau/\hbar} = \frac{i\hbar}{E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}_1} + i\varepsilon} e^{i(E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}})\tau'/\hbar}.$$

Nach der Integration über  $\tau'$  erhalten wir daher

$$\langle \vec{p}' | S^{(2)} | \vec{p} \rangle = -2\pi i \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}}) \int d^3 p_1 \langle \vec{p}' | V | \vec{p}_1 \rangle \frac{1}{E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}_1} + i\varepsilon} \langle \vec{p}_1 | V | \vec{p} \rangle,$$

was genau dem erwarteten Resultat,

$$T^{(2)}(\vec{p}', \vec{p}) = \langle \vec{p}' | V G_0(E_{\vec{p}} + i\varepsilon) V | \vec{p} \rangle,$$

entspricht.

In Abbildung 6 ist ganz rechts jenes Feynmandiagramm dargestellt, welches dem Beitrag dritter Ordnung zur  $T$ -Matrix entspricht:

$$\begin{aligned} T^{(3)}(\vec{p}', \vec{p}) &= \langle \vec{p}' | V G_0(E_{\vec{p}} + i\varepsilon) V G_0(E_{\vec{p}} + i\varepsilon) V | \vec{p} \rangle \\ &= \int d^3 p_2 \int d^3 p_1 \langle \vec{p}' | V | \vec{p}_2 \rangle \frac{1}{E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}_2} + i\varepsilon} \langle \vec{p}_2 | V | \vec{p}_1 \rangle \frac{1}{E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}_1} + i\varepsilon} \langle \vec{p}_1 | V | \vec{p} \rangle. \end{aligned}$$

Wie wir sehen, wird die freie Ausbreitung in einem Zwischenzustand  $|\vec{p}_k\rangle$  zwischen zwei Stößen (nach Durchführung der Zeitintegration) durch den „Propagator“

$$\frac{1}{E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}_k} + i\varepsilon}$$

beschrieben.

Die **Feynmanregeln** für die Berechnung von  $T^{(n)}(\vec{p}', \vec{p})$  lassen sich nun leicht zusammenstellen:

1. Zeichne das entsprechende Feynmandiagramm mit  $n$  „Vertizes“ (d.h.  $n$  Wechselwirkungen mit dem Potential).
2. Schreibe für jeden Vertex einen Faktor  $\langle \vec{p}_{k+1} | V | \vec{p}_k \rangle$  an, wobei  $\vec{p}_0 = \vec{p}$  und  $\vec{p}_n = \vec{p}'$ .
3. Schreibe für die freie Ausbreitung in jedem der Zwischenzustände mit Impulsen  $\vec{p}_k = \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-1}$  jeweils einen Faktor  $1/(E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}_k} + i\varepsilon)$  an.
4. Integriere über alle inneren Impulse  $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n-1}$ .

## 9 Partialwellenentwicklung

Wir betrachten die Streuung in einem radialsymmetrischen Potential  $V(r)$ . In diesem Fall vertauscht nicht nur  $H_0 = \vec{P}^2/2m$ , sondern auch  $H = H_0 + V$  mit allen Komponenten des Drehimpulsoperators  $\vec{L}$ . Da die Møller-Operatoren und der aus ihnen gebildete Streuoperator Limiten von Funktionen von  $H_0$  und  $H$  sind, handelt es sich auch bei  $\Omega_{\text{ein}}$ ,  $\Omega_{\text{aus}}$  und  $S$  um drehinvariante Operatoren. Da weiters, wie in Abschnitt 3 besprochen,  $H_0$  und  $S$  miteinander kommutieren, können  $H_0$ ,  $\vec{L}^2$ ,  $L_z$  **und**  $S$  gleichzeitig diagonalisiert werden. Es gibt also eine (verallgemeinerte) Basis von gemeinsamen Eigenvektoren  $|E, \ell, m\rangle$ , wobei

$$\begin{aligned} H_0 |E, \ell, m\rangle &= E |E, \ell, m\rangle, & E &\in \mathbb{R}^+, \\ \vec{L}^2 |E, \ell, m\rangle &= \hbar^2 \ell(\ell + 1) |E, \ell, m\rangle, & \ell &= 0, 1, 2, \dots, \\ L_z |E, \ell, m\rangle &= \hbar m |E, \ell, m\rangle, & m &= -\ell, \dots, \ell, \\ S |E, \ell, m\rangle &= e^{2i\delta_\ell(E)} |E, \ell, m\rangle, & \delta_\ell(E) &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Form des Eigenwerts von  $S$  folgt aus der Unitarität des Streuoperators, weiters kann man sich leicht davon überzeugen, dass die **Streuphase**  $\delta_\ell(E)$  nicht von  $m$  abhängt.

Die Normierung der Basisvektoren sei durch

$$\langle E', \ell', m' | E, \ell, m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}$$

festgelegt, die Vollständigkeitsrelation schreibt man dann in der Form

$$\int_0^\infty dE \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{m=-\ell}^\ell |E, \ell, m\rangle \langle E, \ell, m| = \mathbb{1}$$



an. Eine besonders einfache Form haben die entsprechenden Impulsraumwellenfunktionen:

$$\langle \vec{p}' | E, \ell, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{mp}} \delta(E_{\vec{p}'} - E) Y_{\ell m}(\hat{\vec{p}}), \quad \hat{\vec{p}} := \vec{p}'/p.$$

Wegen der Radialsymmetrie des Potentials kann die Streuamplitude  $f(\vec{p}', \vec{p})$  nur vom Betrag des Impulses  $p = |\vec{p}'| = |\vec{p}|$  und dem Streuwinkel  $\theta$  abhängen:

$$f(\vec{p}', \vec{p}) = f(p, \theta), \quad \vec{p} \cdot \vec{p}' = p^2 \cos \theta.$$

Wie wir wissen (siehe Abschnitt 3), ist der Zusammenhang zwischen der Streuamplitude und dem S-Matrixelement ist durch

$$\langle \vec{p}' | S - \mathbb{1} | \vec{p} \rangle = \frac{i}{2\pi m \hbar} \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}}) f(\vec{p}', \vec{p})$$

gegeben. Wir formen nun die linke Seite um:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | S - \mathbb{1} | \vec{p} \rangle &= \int_0^\infty dE \sum_{\ell, m} \langle \vec{p}' | S - \mathbb{1} | E, \ell, m \rangle \langle E, \ell, m | \vec{p} \rangle \\ &= \int_0^\infty dE \sum_{\ell=0}^\infty (e^{2i\delta_\ell(E)} - 1) \sum_{m=-\ell}^\ell \langle \vec{p}' | E, \ell, m \rangle \langle E, \ell, m | \vec{p} \rangle \\ &= \int_0^\infty dE \sum_{\ell=0}^\infty (e^{2i\delta_\ell(E)} - 1) \\ &\quad \times \sum_{m=-\ell}^\ell \frac{\delta(E_{\vec{p}'} - E) Y_{\ell m}(\hat{\vec{p}}')}{\sqrt{mp'}} \frac{\delta(E_{\vec{p}} - E) Y_{\ell m}^*(\hat{\vec{p}})}{\sqrt{mp}} \\ &= \frac{1}{mp} \delta(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}}) \sum_{\ell=0}^\infty (e^{2i\delta_\ell(E_{\vec{p}})} - 1) \sum_{m=-\ell}^\ell Y_{\ell m}(\hat{\vec{p}}') Y_{\ell m}^*(\hat{\vec{p}}) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Streuamplitude den Ausdruck

$$f(p, \theta) = \frac{4\pi\hbar}{p} \sum_{\ell=0}^\infty \sin \delta_\ell(p) e^{i\delta_\ell(p)} \sum_{m=-\ell}^\ell Y_{\ell m}(\hat{\vec{p}}') Y_{\ell m}^*(\hat{\vec{p}}), \quad \delta_\ell(p) \equiv \delta_\ell(E_{\vec{p}}).$$

Nun verwenden wir die Formel

$$\sum_{m=-\ell}^\ell Y_{\ell m}(\hat{\vec{p}}') Y_{\ell m}^*(\hat{\vec{p}}) = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos \theta),$$

mit den durch

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

definierten **Legendrepolyomen**. Dies liefert die **Partialwellentwicklung** der Streuamplitude:

$$f(p, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \underbrace{\frac{\sin \delta_\ell(p) e^{i\delta_\ell(p)}}{p/\hbar}}_{=: f_\ell(p)} P_\ell(\cos \theta).$$

Die **Partialwellenamplitude**  $f_\ell(p)$  kann natürlich durch Benützung der Orthogonalitätsrelation der Legendrepolynome,

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell + 1},$$

aus der vollen Amplitude  $f(p, \theta)$  zurückgewonnen werden:

$$f_\ell(p) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta f(p, \theta) P_\ell(\cos \theta).$$

Wir sehen, dass die gesamte Information über den Streuprozess in den Partialwellenamplituden  $f_\ell(p)$  (bzw., äquivalent dazu, in den Streuphasen  $\delta_\ell(p)$ ) steckt.

Die Partialwellenentwicklung führt zu einer Doppelreihe für den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\Omega = |f(p, \theta)|^2$  als Summe von Produkten von Legendrepolyomen. Integriert man diesen Ausdruck über den gesamten Raumwinkel um den totalen Wirkungsquerschnitt zu erhalten, fallen die gemischten Terme wegen der Orthogonalitätsbeziehung der Legendrepolynome weg und man erhält

$$\sigma(p) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_\ell(p), \quad \sigma_\ell(p) = 4\pi(2\ell + 1) |f_\ell(p)|^2 = 4\pi(2\ell + 1) \frac{\sin^2 \delta_\ell(p)}{(p/\hbar)^2}.$$

Wegen  $|\sin \delta_\ell| \leq 1$  sind die Beiträge der einzelnen Partialwellen zum totalen Wirkungsquerschnitt durch

$$\sigma_\ell(p) \leq \frac{4\pi(2\ell + 1)}{(p/\hbar)^2}$$

nach oben beschränkt. Diese Ungleichung wird **Unitaritätsschranke** genannt, da sie aus  $\delta_\ell(p) \in \mathbb{R}$  und somit aus der Unitarität von  $S$  folgt.  $\sigma_\ell(p)$  nimmt seinen Maximalwert genau dann an, wenn die dazugehörige Streuphase  $\delta_\ell(p)$  ein

ganzzahliges Vielfaches von  $\pi/2$  ist. Dies ist beim Auftreten von **Resonanzen** der Fall.

Die praktische Bedeutung der Partialwellenentwicklung liegt darin, dass für niedrige Energien nur eine kleine Anzahl von Phasenwinkeln nicht verschwindet. Dies gestattet eine Parametrisierung der Amplitude  $f(p, \theta)$  durch eine kleine Anzahl von Parametern, wobei die Konsistenz mit der Unitarität von  $S$  automatisch durch die Realität der Phasenwinkel sichergestellt ist.

### **Literatur:**

John R. Taylor: Scattering Theory, John Wiley & Sons, New York, 1972

Walter Thirring: Lehrbuch der Mathematischen Physik, Band 3, Quantenmechanik von Atomen und Molekülen, Springer, Wien, New York, 1994