2. Die Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

2.1 Eigenschwingungen des elektromagnetischen Feldes

Maxwell-Gleichungen für $\rho = \vec{j} = 0$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} & \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array}}$$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ Vektorpotential $\vec{A}$

$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = -\operatorname{grad}\phi$

$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} - \operatorname{grad}\phi$ skalares Potential ϕ

Eichtransformation $\phi \to \phi + \frac{1}{c}\dot{\Lambda}$, $\vec{A} \to \vec{A} - \operatorname{grad}\Lambda$ ändert die physikalischen Felder $\vec{E}, \vec{B}$ nicht

Eichfreiheit kann benutzt werden um Eichbedingung zu wählen

Coulombeichung $\operatorname{div}\vec{A} = 0$

$$\underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}}_{-\Delta\vec{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\dot{\phi}$$

$$-\frac{1}{c}\underbrace{\operatorname{div}\dot{\vec{A}}}_{0} - \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi}_{\Delta\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0 \quad (\text{für } \rho = 0)$$

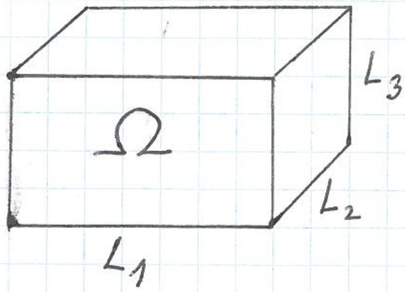
$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)}_{\Box} \vec{A} = 0 \qquad\qquad \operatorname{div}\vec{A} = 0$$

Feldgleichung für $\vec{A}$ Eichbedingung

Wir wollen die allgemeine Lösung für $\vec{A}(t,\vec{x})$ finden.

Problem besonders einfach nach Fouriertransformation, da Differentialoperatoren $\rightarrow$ Multiplikationsoperatoren

Beschränken uns zunächst auf den Fall eines Feldes in einem Quader (Kantenlängen L_1, L_2, L_3) mit periodischen Randbedingungen



$V = L_1 L_2 L_3$

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}\, c_{\vec{k}} \quad , \qquad k_i = \frac{2\pi n_i}{L_i} \quad (i = 1,2,3)$$

Fourierreihe $\qquad n_i \in \mathbb{Z}$

$$c_{\vec{k}} = \int_{\Omega} d^3x \, \frac{e^{-i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{V}}\, f(\vec{x})$$

Bem.: $\Omega \to \mathbb{R}^3$: Fourierreihe $\to$ Fourierintegral

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \, \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \, c(\vec{k})$$

$$c(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \frac{e^{-i\vec{k}\vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \, f(\vec{x})$$

Vektorpotential: $\vec{A}(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}} \, \vec{c}_{\vec{k}}(t)$

$\vec{A}$ soll $\vec{A}^* = \vec{A}$, $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ und $\Box\vec{A} = 0$ erfüllen

$\vec{A}^* = \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}_{-\vec{k}} = \vec{c}_{\vec{k}}^{\,*}$

$\operatorname{div}\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{c}_{\vec{k}} = 0$

$\Box\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{c}}_{\vec{k}}(t) + \vec{k}^2\vec{c}_{\vec{k}}(t) = 0$

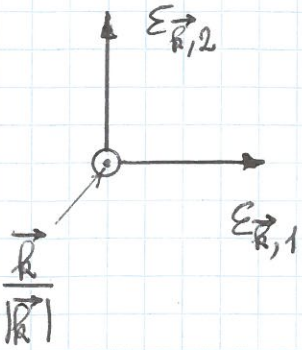
$$\Rightarrow \quad \vec{c}_{\vec{k}}(t) = e^{-i\omega_{\vec{k}}t}\,\vec{b}_{\vec{k}} + e^{+i\omega_{\vec{k}}t}\,\vec{b}_{-\vec{k}}^{\,*}$$

$\omega_{\vec{k}} := c|\vec{k}| \quad , \quad \vec{b}_{\vec{k}}\cdot\vec{k} = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{V}} \left(e^{-i\omega_{\vec{k}}t}\,\vec{b}_{\vec{k}} + e^{+i\omega_{\vec{k}}t}\,\vec{b}_{-\vec{k}}^{\,*} \right)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{V}} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \underbrace{e^{-i\omega_{\vec{k}}t}\,\vec{b}_{\vec{k}}}_{\vec{b}_{\vec{k}}(t)} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{+i\omega_{\vec{k}}t}\,\vec{b}_{\vec{k}}^{\,*} \right)$$

$\Rightarrow \quad \dot{\vec{b}}_{\vec{k}}(t) = -i\omega_{\vec{k}}\,\vec{b}_{\vec{k}}(t)$



$$\overbrace{\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1},\ \vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}}^{\text{reelle Vektoren}},\ \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$ bilden eine rechtsh. ONB des $\mathbb{R}^3$

$$|\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}| = |\vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}| = 1$$

$$\vec{b}_k = b_{\vec{k},1}\,\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1} + b_{\vec{k},2}\,\vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}$$

entspricht einer Zerlegung nach <u>linear</u> polarisierten Wellen

Zerlegung nach <u>zirkular</u> polarisierten Wellen:

$$\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} = -\lambda\,\frac{\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1} + i\lambda\,\vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}}{\sqrt{2}}\quad,\quad \lambda = \pm\quad,\quad \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{k} = 0$$

↑
komplexe Vektoren $\qquad \vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda'}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} = \delta_{\lambda\lambda'}$

$$\boxed{\vec{A}(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda}\Big(\underbrace{\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}\,\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}}_{\vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{x})}\ \underbrace{e^{-i\omega_{\vec{k}}t}\,b_{\vec{k},\lambda}}_{b_{\vec{k},\lambda}(t)} + \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}\,\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\,e^{+i\omega_{\vec{k}}t}\,b^{*}_{\vec{k},\lambda}\Big)}$$

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L_i}\quad (i = 1,2,3)\ ,\ n_i \in \mathbb{Z}\ ;\ \lambda = 1,2\ (\text{oder } \pm)$$

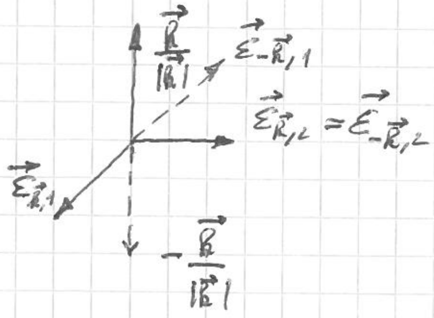
unendlich viele <u>harmonische Oszillatoren</u>

$$\int d^3x\; \vec{u}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{x})^* \cdot \vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k}'\vec{k}}\, \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\int d^3x\; \vec{u}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{x}) \cdot \vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k}',-\vec{k}}\, \delta_{\lambda\lambda'}$$

Konvention für <u>lineare</u> Polarisationsvektoren:

$\vec{\varepsilon}_{-\vec{k},1} = -\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}\,,\quad \vec{\varepsilon}_{-\vec{k},2} = \vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}$



$\Rightarrow\; \vec{\varepsilon}^{\,*}_{-\vec{k},\pm} = -\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\pm}$ für die

<u>zirkularen</u> Polarisationsvektoren

<u>Energie</u> des elektromagnetischen Feldes:

$$\mathcal{E}_{\text{Feld}} = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega d^3x\, \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega d^3x \left[\frac{1}{c^2}\dot{\vec{A}}^2 + (\operatorname{rot}\vec{A})^2\right]$$

$$\int_\Omega d^3x\, (\operatorname{rot}\vec{A})^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{part. Int. + Feldgl. + Eichbed.}}}{=} -\frac{1}{c^2}\int d^3x\, \vec{A}\cdot\ddot{\vec{A}}$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{E}_{\text{Feld}} = \frac{1}{8\pi c^2}\int_\Omega d^3x\, \left(\dot{\vec{A}}^2 - \vec{A}\cdot\ddot{\vec{A}}\right)$$

$$= \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{\omega_{\vec{k}}^2}{2\pi c^2}\,|b_{\vec{k},\lambda}|^2 = \sum_{\vec{k},\lambda} \underbrace{\frac{\vec{k}^2}{2\pi}\,|b_{\vec{k},\lambda}|^2}_{\mathcal{E}_{\vec{k},\lambda}}$$

<u>Impuls</u> des elektromagnetischen Feldes

$$\vec{P}_{\text{Feld}} = \int d^3x\, \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\,\frac{\mathcal{E}_{\vec{k},\lambda}}{c}$$

2.2 Quantisierung

zu jedem $(\vec{k},\lambda)$ gibt es einen harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ → Quantisierung klar

$\mathcal{E}_{Feld}$ → Hamiltonoperator $H = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \underbrace{a^\dagger_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}}_{N_{\vec{k},\lambda}}$

$N_{\vec{k},\lambda}$ ... Besetzungszahloperator

unendliche Nullpunktsenergie (Vakuumenergie) $\frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}}$ abgezogen

$$\frac{\omega_{\vec{k}}^2}{2\pi c^2} b^\dagger_{\vec{k},\lambda} b_{\vec{k},\lambda} = \hbar\omega_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} \Rightarrow b_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}}}}\, a_{\vec{k},\lambda}$$

$a_{\vec{k},\lambda}$ = Vernichtungsoperatoren, $a^\dagger_{\vec{k},\lambda}$ = Erzeugungsoperatoren

$$[a_{\vec{k},\lambda}, a^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad [a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}] = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$[a^\dagger_{\vec{k},\lambda}, a^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}] = 0$$

$$[H, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}] = \hbar\omega_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k},\lambda}$$

Feldoperator (Vektorpotential)

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}}} \left(e^{-ikx} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} + e^{+ikx} \vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda} a^\dagger_{\vec{k},\lambda} \right)$$

$$k^\mu = (\omega_{\vec{k}}/c, \vec{k}), \quad k\cdot x = k^\mu x_\mu = \omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x}$$

$$= p\cdot x/\hbar$$

4- Skalarprodukt

<u>Probe:</u> Heisenbergsche Bewegungsgleichung für $\vec{A}(t,\vec{x})$ tatsächlich erfüllt:

$$\dot{\vec{A}}(t,\vec{x}) = \frac{i}{\hbar}\,[H, \vec{A}(t,\vec{x})] \quad \checkmark$$

<u>Impulsoperator</u> $\vec{P} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\vec{k}\, a^\dagger_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}$, $[\vec{P}, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}] = \hbar\vec{k}\, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}$

$[N_{\vec{k}',\lambda'}, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}] = \delta_{\vec{k}'\vec{k}}\,\delta_{\lambda'\lambda}\, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}$

<u>Grundzustand</u> (Vakuumzustand) $|0\rangle$ charakterisiert durch $a_{\vec{k},\lambda}|0\rangle = 0 \quad \forall (\vec{k},\lambda)$, $\langle 0|0\rangle = 1$

$\Rightarrow \quad H|0\rangle = 0 \;, \quad \vec{P}|0\rangle = 0 \;, \quad N_{\vec{k},\lambda}|0\rangle = 0$

<u>Einteilchenzustände:</u> $\quad |\vec{k},\lambda\rangle := a^\dagger_{\vec{k},\lambda}|0\rangle$

$$N_{\vec{k}',\lambda'}|\vec{k},\lambda\rangle = \underbrace{\delta_{\vec{k}'\vec{k}}\,\delta_{\lambda'\lambda}}_{0 \text{ oder } 1}|\vec{k},\lambda\rangle$$

$$H|\vec{k},\lambda\rangle = \underbrace{\hbar\omega_{\vec{k}}}_{E}|\vec{k},\lambda\rangle$$

$$\vec{P}|\vec{k},\lambda\rangle = \underbrace{\hbar\vec{k}}_{\vec{p}}|\vec{k},\lambda\rangle$$

$E = \hbar\omega_{\vec{k}} = c\hbar|\vec{k}| = c|\vec{p}|$ Energie-Impuls-Beziehung eines <u>masselosen</u> Teilchens $\rightarrow$ Photon

$p^\mu = (|\vec{p}|, \vec{p})$ 4-Impuls $\quad p^\mu p_\mu = 0$

$$P^\mu |\vec{k},\lambda\rangle = p^\mu |\vec{k},\lambda\rangle$$

$$|n_{\vec{k},\lambda}\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k},\lambda}!}} \left(a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\right)^{n_{\vec{k},\lambda}} |0\rangle \quad , \quad \langle n_{\vec{k},\lambda} | n_{\vec{k}',\lambda'}\rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$N_{\vec{k}',\lambda'} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle = \delta_{\vec{k}'\vec{k}}\,\delta_{\lambda'\lambda}\, n_{\vec{k},\lambda} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle$$

$$H |n_{\vec{k},\lambda}\rangle = n_{\vec{k},\lambda}\, \hbar\omega_{\vec{k},\lambda} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle$$

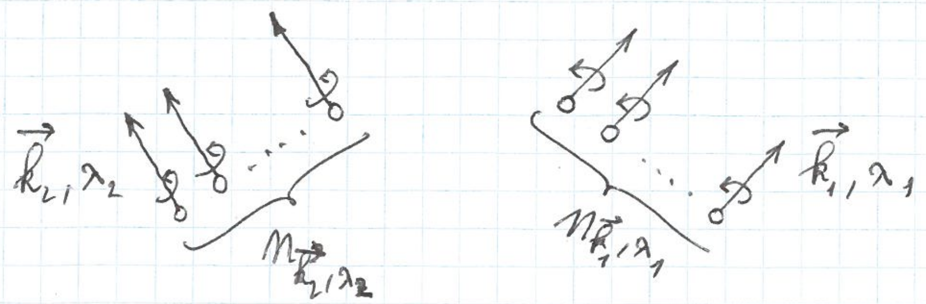
$$\vec{P} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle = n_{\vec{k},\lambda}\, \hbar\vec{k} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle$$

$|n_{\vec{k},\lambda}\rangle$ ... Energie-Impuls-Eigenzustand mit $n_{\vec{k},\lambda}$ Photonen mit Wellenzahlvektor $\vec{k}$ und Pol. λ

$a^\dagger_{\vec{k},\lambda}$ ... Erzeugungsoperator („erzeugt" ein Quant = Photon mit Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ und Polarisation λ)

$a_{\vec{k},\lambda}$ ... Vernichtungsoperator

$$|n_{\vec{k}_1,\lambda_1}, n_{\vec{k}_2,\lambda_2}, \ldots\rangle := \frac{\left(a^\dagger_{\vec{k}_1,\lambda_1}\right)^{n_{\vec{k}_1,\lambda_1}}}{\sqrt{n_{\vec{k}_1,\lambda_1}!}} \frac{\left(a^\dagger_{\vec{k}_2,\lambda_2}\right)^{n_{\vec{k}_2,\lambda_2}}}{\sqrt{n_{\vec{k}_2,\lambda_2}!}} \cdots |0\rangle$$



$$H\,|\ldots, n_{\vec{k}_i,\lambda_i},\ldots\rangle = \hbar\,(\ldots + \omega_{\vec{k}_i}\, n_{\vec{k}_i,\lambda_i} + \ldots)\,|\ldots, n_{\vec{k}_i,\lambda_i},\ldots\rangle$$

$$\vec{P}\,| \quad -\!/\!/\!- \quad \rangle = \hbar\,(\ldots + \vec{k}_i\, n_{\vec{k}_i,\lambda_i} + \ldots)\,| \quad -\!/\!/\!- \quad \rangle$$

$$N_{\vec{k},\lambda}\,| \quad -\!/\!/\!- \quad \rangle = (\ldots + \delta_{\vec{k}\vec{k}_i}\,\delta_{\lambda\lambda_i}\, n_{\vec{k}_i,\lambda_i} + \ldots)\,| \quad -\!/\!/\!- \quad \rangle$$

Besetzungszahloperator $N_{\vec{k},\lambda}$ „misst" die Anzahl der Teilchen (Photonen) mit Wellenzahlvektor $\vec{k}$ (Impuls $\hbar\vec{k}$) und Polarisation λ

<u>Gesamtteilchenzahloperator</u> $N = \sum_{\vec{k},\lambda} N_{\vec{k},\lambda}$

$$N\,|\ldots, n_{\vec{k}_i,\lambda_i},\ldots\rangle = (\ldots + n_{\vec{k}_i,\lambda_i} + \ldots)\,|\ldots, n_{\vec{k}_i,\lambda_i},\ldots\rangle$$

<u>Hilbertraum:</u>

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \ldots \qquad \underline{\text{Fockraum}}$$

$\mathcal{H}^{(n)}$ ... n-Teilchen Unterraum (aufgespannt von Vektoren $\sim a^{\dagger}_{\vec{k}_1,\lambda_1} \ldots a^{\dagger}_{\vec{k}_n,\lambda_n}|0\rangle$; $N\mathcal{H}^{(n)} = n\mathcal{H}^{(n)}$)

$\mathcal{H}^{(0)}$ aufgespannt von $|0\rangle$ (eindim. Unterraum)

Kontinuumslimes ($\Omega \to \mathbb{R}^3$)

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L_i} \Rightarrow d^3 n = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k \underset{\uparrow \atop \vec{p} = \hbar \vec{k}}{=} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p$$

$$\sum_{\vec{k}} \to \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k$$

$$[a_{\vec{k},\lambda}, a^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{V} \int_\Omega d^3x \, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \delta_{\lambda\lambda'} \longrightarrow$$

$$\underset{\Omega \to \mathbb{R}^3}{\longrightarrow} \frac{(2\pi)^3}{V} \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$a_{\vec{k},\lambda} \underset{\Omega \to \mathbb{R}^3}{\longrightarrow} \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{V^{1/2}} a(\vec{p},\lambda)$$

$$[a(\vec{p},\lambda), a(\vec{p}',\lambda')^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\vec{A}(x) \longrightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_\lambda \int d^3p \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}\right)^{1/2} \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{V^{1/2}} [e^{-ipx/\hbar} \vec{\varepsilon}(\vec{p},\lambda) a(\vec{p},\lambda) + \text{h.k.}]$$

$$= \sum_\lambda \int d^3p \frac{c}{2\pi\hbar\, \omega_p^{1/2}} [e^{-ipx/\hbar} \vec{\varepsilon}(\vec{p},\lambda) a(\vec{p},\lambda) + e^{+ipx/\hbar} \vec{\varepsilon}(\vec{p},\lambda)^* a(\vec{p},\lambda)^\dagger]$$

wobei $\omega_p = \frac{E_{\vec{p}}}{\hbar} = \frac{c|\vec{p}|}{\hbar}$

$$H = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \sum_\lambda \hbar\omega_p \frac{(2\pi\hbar)^3}{V}\, a(\vec{p},\lambda)^\dagger a(\vec{p},\lambda)$$

$$= \int d^3p \sum_\lambda \underbrace{E_{\vec{p}}}_{c|\vec{p}|}\, a(\vec{p},\lambda)^\dagger a(\vec{p},\lambda) \qquad \text{Energie}$$

$$\vec{P} = \int d^3p \sum_\lambda \vec{p}\, a(\vec{p},\lambda)^\dagger a(\vec{p},\lambda) \qquad \text{Impuls}$$

Teilchenzahldichte (im Impulsraum) $N(\vec{p},\lambda) = a(\vec{p},\lambda)^\dagger a(\vec{p},\lambda)$

Teilchenzahl $N = \int d^3p \sum_\lambda N(\vec{p},\lambda)$

Vakuum $|0\rangle$ mit $a(\vec{p},\lambda)|0\rangle = 0 \quad \forall (\vec{p},\lambda)$

Normierung $\langle 0|0\rangle = 1$

<u>Einphoton</u>- Zustand mit Impuls $\vec{p}$ und Polarisation λ

$$|\vec{p},\lambda\rangle = a(\vec{p},\lambda)^\dagger |0\rangle$$

$$P^\mu |\vec{p},\lambda\rangle = p^\mu |\vec{p},\lambda\rangle \quad , \quad N|\vec{p},\lambda\rangle = |\vec{p},\lambda\rangle$$

Normierung:

$$\langle \vec{p},\lambda|\vec{p}\,',\lambda'\rangle = \langle 0|\, a(\vec{p},\lambda)\, a(\vec{p}\,',\lambda')^\dagger |0\rangle =$$

$$= \langle 0|\underbrace{[a(\vec{p},\lambda), a(\vec{p}\,',\lambda')^\dagger]}_{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')\,\delta_{\lambda\lambda'}}|0\rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')\,\delta_{\lambda\lambda'} \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1}$$

Wie üblich bei kontinuierlichem Spektrum sind die Eigen-„Vektoren" des Impulsoperators nicht normierbar ($\rightarrow$ Eigendistributionen).

Normierbare Zustände erhält geeignete Superposition von Eigendistributionen:

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_\lambda \int d^3p \; \psi^{(1)}(\vec{p},\lambda) \, |\vec{p},\lambda\rangle$$

$$\langle\psi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle = \sum_\lambda \int d^3p \; |\psi^{(1)}(\vec{p},\lambda)|^2 = 1$$

$\psi^{(1)}(\vec{p},\lambda) = \langle\vec{p},\lambda|\psi^{(1)}\rangle$ Wahrscheinlichkeitsamplitude (Wellenfunktion im Impulsraum)

$d^3p \, |\psi^{(1)}(\vec{p},\lambda)|^2$ = Wahrscheinlichkeit das Photon mit Pol. λ und Impuls $\vec{p}$ im Bereich d^3p anzutreffen, wenn es sich im Zustand $|\psi^{(1)}\rangle$ befindet

<u>Projektor</u> auf den Einteilchenraum:

$$P^{(1)} = \sum_\lambda \int d^3p \; |\vec{p},\lambda\rangle\langle\vec{p},\lambda|$$

$$P^{(1)\dagger} = P^{(1)} \, , \quad (P^{(1)})^2 = P^{(1)}$$

$$P^{(1)} \underbrace{|\psi^{(1)}\rangle}_{\in \mathcal{H}^{(1)}} = |\psi^{(1)}\rangle$$

Zweiteilchen - Energieimpulseigenzustand

$$|\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2\rangle = a(\vec{p}_1,\lambda_1)^\dagger\, a(\vec{p}_2,\lambda_2)^\dagger |0\rangle$$

$$P^\mu |\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2\rangle = (p_1+p_2)^\mu\, |\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2\rangle$$

$$N\, |\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2\rangle = 2\, |\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2\rangle$$

Normierung:

$$\langle\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2|\vec{p}_1{}',\lambda_1';\vec{p}_2{}',\lambda_2'\rangle =$$

$$= \delta^{(3)}(\vec{p}_1-\vec{p}_1{}')\,\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\,\delta^{(3)}(\vec{p}_2-\vec{p}_2{}')\,\delta_{\lambda_2\lambda_2'}$$
$$+\,\delta^{(3)}(\vec{p}_1-\vec{p}_2{}')\,\delta_{\lambda_1\lambda_2'}\,\delta^{(3)}(\vec{p}_2-\vec{p}_1{}')\,\delta_{\lambda_2\lambda_1'}$$

Projektor auf $\mathcal{H}^{(2)}$:

$$P^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\int d^3p_1\, d^3p_2\, |\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2\rangle\langle\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2|$$

$$P^{(2)\dagger} = P^{(2)}, \quad (P^{(2)})^2 = P^{(2)}, \quad P^{(2)}\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}^{(2)}$$

$\Rightarrow$ allgemeiner Zweiphoton-Zustand $|\psi^{(2)}\rangle \in \mathcal{H}^{(2)}$

$$|\psi^{(2)}\rangle = P^{(2)}|\psi^{(2)}\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\int d^3p_1\, d^3p_2\, |\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2\rangle \underbrace{\langle\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2|\psi^{(2)}\rangle}_{\psi^{(2)}(\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2)}$$

<u>2-Photon-Wellenfunktion</u> $\psi^{(2)}(\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2)$

<u>symmetrisch</u> bei Vertauschung $(\vec{p}_1, \lambda_1) \leftrightarrow (\vec{p}_2, \lambda_2)$

wegen $[a(p_1, \lambda_1)^\dagger, a(p_2, \lambda_2)^\dagger] = 0$ $\rightarrow$ <u>Bosesymmetrie</u>

Normierung der Wellenfunktion:

$$1 = \langle \psi^{(2)} | \psi^{(2)} \rangle = \langle \psi^{(2)} | P^{(2)} | \psi^{(2)} \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int d^3p_1 \, d^3p_2 \, \underbrace{\langle \psi^{(2)} | \vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2 \rangle}_{\psi^{(2)}(\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2)^*} \underbrace{\langle \vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2 | \psi^{(2)} \rangle}_{\psi^{(2)}(\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int d^3p_1 \, d^3p_2 \, |\psi^{(2)}(\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2)|^2$$

$|\psi^{(2)}(\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2)|^2 \, d^3p_1 \, d^3p_2$ ein Photon mit Polarisation λ_1 und Impuls $\vec{p}_1$ (Toleranz d^3p_1) und ein zweites mit Pol. λ_2 und Impuls $\vec{p}_2$ (Toleranz d^3p_2) zu finden

$$\frac{1}{2} \left[|\psi^{(2)}(\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2)|^2 d^3p_1 \, d^3p_2 + |\psi^{(2)}(\vec{p}_2, \lambda_2; \vec{p}_1, \lambda_1)|^2 d^3p_2 \, d^3p_1 \right]$$

$$= |\psi^{(2)}(\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2)|^2 \, d^3p_1 \, d^3p_2$$

n-Photon-Zustände

$$|\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots;\vec{p}_n,\lambda_n\rangle := a(\vec{p}_1,\lambda_1)^\dagger \ldots a(\vec{p}_n,\lambda_n)^\dagger |0\rangle$$

$$P^\mu |\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots,\vec{p}_n,\lambda_n\rangle = (p_1^\mu+\ldots+p_n^\mu)\,|\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots;\vec{p}_n,\lambda_n\rangle$$

$$N\,| \quad -\!\!{}^{\shortparallel}\!\!- \quad \rangle = n\,| -\!\!{}^{\shortparallel}\!\!- \rangle$$

Normierung:

$$\langle\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots;\vec{p}_n,\lambda_n|\vec{p}_1{}',\lambda_1';\ldots;\vec{p}_n{}',\lambda_n'\rangle =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} \delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{p}{}'_{\sigma(i)})\,\delta_{\lambda_i\lambda'_{\sigma(i)}}$$

↑
Permutationen von
n Elementen

Projektor auf $\mathcal{H}^{(n)}$:

$$P^{(n)} = \frac{1}{n!}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\int d^3p_1\ldots d^3p_n\,|\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots;\vec{p}_n,\lambda_n\rangle\langle\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots;\vec{p}_n,\lambda_n|$$

allgemeiner n-Teilchen-Zustand $|\psi^{(n)}\rangle\in\mathcal{H}^{(n)}$:

$$|\psi^{(n)}\rangle = \frac{1}{n!}\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\int d^3p_1\ldots d^3p_n\,|\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots\vec{p}_n,\lambda_n\rangle\underbrace{\langle\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots;\vec{p}_n,\lambda_n|\psi^{(n)}\rangle}_{\psi^{(n)}(\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots;\vec{p}_n,\lambda_n)}$$

Normierung: $1 = \langle\psi^{(n)}|\psi^{(n)}\rangle =$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\int d^3p_1\ldots d^3p_n\,|\psi^{(n)}(\vec{p}_1,\lambda_1;\ldots;\vec{p}_n,\lambda_n)|^2$$

$$\mathbb{1} = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}\,, \qquad P^{(0)} = |0\rangle\langle 0|$$

2.3 Helizität des Photons

Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes:

$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi c} \int d\vec{x}^3 \; \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$J_i \overset{\uparrow}{=} \underbrace{\frac{\varepsilon_{ijk}}{4\pi c} \int d\vec{x}^3 \, x_j E_\ell \nabla_k A_\ell}_{L_i} + \underbrace{\frac{\varepsilon_{ijk}}{4\pi c} \int d\vec{x}^3 \, E_j A_k}_{S_i}$$

partielle Int. +
$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

Betrachten Impulseigenzstd. $|\vec{p}, \lambda\rangle = a(\vec{p},\lambda)^\dagger |0\rangle$

Wegen $[J_k, P_\ell] \neq 0$ kein Drehimpulseigenzustand, aber mit Projektion auf Bewegungsrichtung $\vec{L}\cdot\vec{p}\,|\vec{p},\lambda\rangle = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{J}\cdot\vec{p}\,|\vec{p},\lambda\rangle = \vec{S}\cdot\vec{p}\,|\vec{p},\lambda\rangle$$

$$\vec{S} = -i\hbar \sum_{\alpha,\beta} \int d^3q \; \vec{\varepsilon}(\vec{q},\alpha)^* \times \vec{\varepsilon}(\vec{q},\beta) \; a(\vec{q},\alpha)^\dagger a(\vec{q},\beta)$$

Helizitätsoperator $\quad \vec{J}\cdot\vec{P}/|\vec{P}|$ Projektion des Drehimpulses auf die Bewegungsrichtung

$$\vec{S}\cdot\vec{p}\,|\vec{p},\lambda\rangle =$$

$$= -i\hbar \sum_{\alpha,\beta} \int d^3q \, [\vec{\varepsilon}(\vec{q},\alpha)^* \times \vec{\varepsilon}(\vec{q},\beta)]\cdot\vec{p} \; a(\vec{q},\alpha)^\dagger \underbrace{a(\vec{q},\beta)\, a(\vec{p},\lambda)^\dagger |0\rangle}_{\delta_{\beta\lambda}\, \delta^{(3)}(\vec{q}-\vec{p})\,|0\rangle}$$

$$= -i\hbar \sum_{\alpha} [\vec{\varepsilon}(\vec{p},\alpha)^* \times \vec{\varepsilon}(\vec{p},\lambda)]\cdot\vec{p} \; |\vec{p},\alpha\rangle$$

$$\boxed{\frac{\vec{J}}{\hbar}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\,|\vec{p},\lambda\rangle = -i\sum_{\alpha}\left[\vec{\varepsilon}(\vec{p},\alpha)^{*}\times\vec{\varepsilon}(\vec{p},\lambda)\right]\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\,|\vec{p},\alpha\rangle}$$

für <u>linear polarisierte</u> Zustände (reelle Polarisationsvektoren):

$$\frac{\vec{J}}{\hbar}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\,|\vec{p},1\rangle = i\,|\vec{p},2\rangle$$

$$\frac{\vec{J}}{\hbar}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\,|\vec{p},2\rangle = -i\,|\vec{p},1\rangle$$

$$\Rightarrow\quad \langle\vec{p},\alpha|\,\frac{\vec{J}}{\hbar}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\,|\vec{p},\beta\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte ± 1

Diagonalisierung $\rightarrow$ zirkular polarisierte Einphotonzustände

(Helizitätseigenzustände)

$$|\vec{p},+\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{p},1\rangle + i\,|\vec{p},2\rangle\right)$$

$$|\vec{p},-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{p},1\rangle - i\,|\vec{p},2\rangle\right)$$

$$\Rightarrow\quad a(\vec{p},\sigma)^{\dagger} = -\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left[a(\vec{p},1)^{\dagger} + i\sigma\,a(\vec{p},2)^{\dagger}\right]$$

$\sigma = \pm$

$$a(\vec{p},\sigma) = -\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left[a(\vec{p},1) - i\sigma\,a(\vec{p},2)\right]$$

$$\boxed{\frac{\vec{J}}{\hbar} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \, |\vec{p}, \pm\rangle = \pm |\vec{p}, \pm\rangle}$$

$|\vec{p}, \pm\rangle$ ... Eigenzustände der Helizität mit Eigenwerten $\pm\hbar$

$\Rightarrow$ Photon hat Spin 1

Bemerkenswert: $\nexists$ Zustand mit Helizität 0 (nur zwei lin. unabh. Polarisationszustände!) $\rightarrow$ tieferer Grund: Darstellungstheorie der Poincarégruppe ($m=0$)

2.4 Kohärente Zustände

Welcher Zustand entspricht einem klassischen elm. Feld?

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V}} \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\omega_{\vec{k}}}\, \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} \left(e^{-ikx} a_{\vec{k},\lambda} - e^{+ikx} a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\right)$$

(verwende in diesem Abschnitt endliches Volumen V und reelle Polarisationsvektoren)

n-Photonzustand $|n\rangle$: $\langle n|\vec{E}|n\rangle = 0$, da $\langle n|n\pm 1\rangle = 0$

bereits aus QM I für harm. Oszillator bekannt:

kohärenter Zustand $|z\rangle$ definiert durch

$a_{\vec{k},\lambda} |z\rangle = \underbrace{z_{\vec{k},\lambda}}_{\in \mathbb{C}} |z\rangle$ leistet das gewünschte:

$$\langle z | \vec{E} | z \rangle = i \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V}} \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\omega_{\vec{k}}}\, \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} \left(e^{-ikx} z_{\vec{k},\lambda} - e^{+ikx} z^*_{\vec{k},\lambda} \right)$$

$$|z\rangle = \prod_{\vec{k},\lambda} \left(e^{-|z_{\vec{k},\lambda}|^2/2}\, e^{z_{\vec{k},\lambda} a^\dagger_{\vec{k},\lambda}} \right) |0\rangle$$

Erwartungswert von $N_{\vec{k},\lambda} = a^\dagger_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}$: $|z_{\vec{k},\lambda}|^2$

mögliche Messwerte $n = 0, 1, 2, \ldots$ von $N_{\vec{k},\lambda}$ sind im Zustand $|z\rangle$ poissonverteilt mit Wahrscheinlichkeiten $e^{-|z_{\vec{k},\lambda}|^2} \frac{(|z_{\vec{k},\lambda}|^2)^n}{n!}$

$$\langle z | N_{\vec{k},\lambda} | z \rangle = |z_{\vec{k},\lambda}|^2$$

$$\langle z | N^2_{\vec{k},\lambda} | z \rangle = |z_{\vec{k},\lambda}|^2 \left(|z_{\vec{k},\lambda}|^2 + 1 \right)$$

$$\Rightarrow (\Delta N_{\vec{k},\lambda})^2_{|z\rangle} = \langle z | N^2_{\vec{k},\lambda} | z \rangle - \langle z | N_{\vec{k},\lambda} | z \rangle^2 = |z_{\vec{k},\lambda}|^2$$

$$\Rightarrow \Delta N_{\vec{k},\lambda} = |z_{\vec{k},\lambda}|$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N_{\vec{k},\lambda}}{\langle N_{\vec{k},\lambda} \rangle} = \frac{1}{|z_{\vec{k},\lambda}|} = \frac{1}{\sqrt{\langle N_{\vec{k},\lambda} \rangle}}$$

klassischer Limes $\langle N_{\vec{k},\lambda} \rangle \to \infty$

$\Downarrow$

relat. Schwankung der Teilchenzahl $\to 0$

Unschärfe von $\vec{E}$ im Zustand $|z\rangle$:

$$\langle z|\vec{E}^2|z\rangle = -\frac{2\pi\hbar}{V}\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}\;\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k}',\lambda'}$$

$$\times\langle z|\Big(e^{-ik.x}a_{\vec{k},\lambda}-e^{+ik.x}\underbrace{a^{+}_{\vec{k},\lambda}}_{\downarrow\; z^*_{\vec{k},\lambda}}\Big)\Big(e^{-ik'x}\underbrace{a_{\vec{k}',\lambda'}}_{\downarrow\; z_{\vec{k}',\lambda'}}-e^{+ik'x}a^{+}_{\vec{k}',\lambda'}\Big)|z\rangle$$

$$= \langle z|\vec{E}|z\rangle^2 + \underbrace{\frac{2\pi\hbar}{V}\sum_{\vec{k},\lambda}\omega_{\vec{k}}}_{\text{Energiedichte des Vakuums} \times 4\pi}$$

Ergebnis nicht überraschend, da $\vec{E}$ ja einer Messung des Feldes bis zu beliebig kleinen Distanzen (beliebig kleine Probeladung) und damit bis zu beliebig großen Photonimpulsen entsprechen würde → $\vec{E}$ entspricht <u>nicht</u> einer realistischen Messanordnung

→ suchen Observable, die dem tatsächlich gemessenen elektr. Feld bei Berücksichtigung einer endlichen räumlichen und zeitlichen Auflösung des Messgeräts (Probeladung ausgedehnt, etc.)

→ Ausschmierung des Feldoperators $\vec{E}(t,\vec{x})$ über endliches Raum-Zeit-Gebiet

$$\rightarrow \quad \hat{\vec{E}}(t,\vec{x}) := \int dt' d^3x' \, f(t-t', \vec{x}-\vec{x}') \, \vec{E}(t', \vec{x}')$$

$f(t,\vec{x})$ um $t=0$, $\vec{x}=0$ konzentriert, $\int dt \, d^3x \, f(t,\vec{x}) = 1$

→ Fourierzerlegung von $\hat{\vec{E}}$:

$$\hat{\vec{E}}(t,\vec{x}) = i \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V}} \sum_{\vec{k},\lambda} f_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\omega_{\vec{k}}} \, \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} \left(e^{-ikx} a_{\vec{k},\lambda} - e^{+ikx} a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda} \right)$$

mit geeigneter Gewichtsfunktion $f_{\vec{k},\lambda}$ (Abschneidefunktion im $\vec{k}$-Raum)

→ $\langle z | \hat{\vec{E}}^2 | z \rangle - \langle z | \hat{\vec{E}} | z \rangle^2$ endlich