1. Die elektromagnetische Wechselwirkung in der Quantentheorie

1.1 Klassische Beschreibung

T3: Beschreibung des elektromagnetischen Feldes durch das Viererpotential

$$A^\mu(x) = (\underbrace{A^0(t,\vec{x})}_{\equiv \phi(t,\vec{x})}, \vec{A}(t,\vec{x}))$$

$\phi(t,\vec{x})$ ... skalares Potential

$\vec{A}(t,\vec{x})$ ... Vektorpotential

Zusammenhang mit dem Feldstärketensor:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{E}$ ... elektrisches Feld , $\vec{B}$ ... Magnetfeld

Wirkungsintegral von Feld und Teilchen:

$$S = -\sum_a m_a c \int ds_a - \sum_a \frac{q_a}{c} \int A_\mu \, dx_a^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int d^4x \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

m_a ... Masse des a-ten Teilchens, q_a ... elm. Ladung des a-ten Teilchens ein geladenes Teilchen in einem äußeren (d. h. vorgegebenen) elektromagnetischen Feld:

$$S = -mc\int ds - \frac{q}{c}\int dx^\mu A_\mu$$

$$= \int dt\,\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

→ Lagrangefunktion $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$

zu x_i kanonisch konjugierter Impuls:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \underbrace{\frac{m v_i}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}}_{p_i \text{ (physikalischer Impuls)}} + \frac{q}{c}A_i \qquad (\text{dreidim. Notation } A_i = A^i)$$

$$\vec{P} = \underbrace{\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}}_{\vec{p}} + \frac{q}{c}\vec{A}$$

Hamiltonfunktion $H = H(t, \vec{x}, \vec{P})$

$$H = \sum_i v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + q\phi$$

noch durch $t, \vec{x}, \vec{P}$ auszudrücken!

$$H - q\phi = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

zwischen $H - q\phi$ und $\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$ besteht die gleiche Beziehung wie zwischen E und $\vec{p}$ bei Abwesenheit des Feldes

$$\left(\frac{H-q\phi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\vec{P}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec{P}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2} + q\phi$$

nichtrelativistischer Limes ($v \ll c$):

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}.\vec{A}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

1.2 Quantenmechanik eines geladenen Teilchens in Anwesenheit eines äußeren (klassischen) elektromagnetischen Feldes

$\vec{x}, \vec{P}$ werden zu Operatoren $\vec{X}, \vec{P}$ mit den kanonischen Vertauschungsrelation

$$[X_k, P_l] = i\hbar\,\delta_{kl}\mathbb{1}, \quad [X_k, X_l] = [P_k, P_l] = 0$$

in der Ortsdarstellung realisiert durch Multiplikationsoperatoren $X_k = x_k$ und Differentialoperatoren $P_k = -i\hbar\nabla_k$, die auf Ortsraumwellenfunktionen $\psi(\vec{x})$ wirken

Hamiltonoperator (für Teilchen ohne Spin)

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\right]^2 + q\,\phi(t,\vec{x})$$

Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle$$

Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung
$(\psi(t,\vec{x}) \equiv \langle\vec{x}|\psi(t)\rangle)$:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{c\hbar}\vec{A}(t,\vec{x})\right)^2 + q\,\phi(t,\vec{x})\right]\psi(t,\vec{x})$$

kovariante Ableitung:

$$\vec{D} = \vec{\nabla} - \frac{iq}{c\hbar}\vec{A}\,, \qquad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar}\phi$$

4-Notation: $D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{c\hbar}A_\mu = \left(\frac{1}{c}D_t, \vec{D}\right)$

Eichtransformation $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ ändert $F_{\mu\nu}$ nicht

bei gleichzeitiger Transformation $\psi'(x) = e^{-\frac{iq}{c\hbar}\Lambda(x)}\psi(x)$
ändert sich die Schrödingergleichung nicht, da

$$D'_\mu\psi'(x) = \left(\partial_\mu + \frac{iq}{c\hbar}A'_\mu\right)e^{-\frac{iq}{c\hbar}\Lambda(x)}\psi(x) = e^{-\frac{iq}{c\hbar}\Lambda(x)}\underbrace{\left(\partial_\mu + \frac{iq}{c\hbar}A_\mu\right)\psi(x)}_{D_\mu\psi(x)}$$

wir wissen aus T2: Wellenfunktionen $\psi(t,\vec{x})$ und $e^{i\alpha}\psi(t,\vec{x})$ beschreiben den selben Zustand (globale Phasentransformation) $\rightarrow$ wenn dies auch für eine lokale Phasentransformation $\psi(t,\vec{x}) \rightarrow e^{i\alpha(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})$ der Fall sein soll, muss ich das Eichfeld $A_\mu(t,\vec{x})$ (= elektromagnetisches Feld) einführen $\rightarrow$ lokale U(1) – Eichtheorie

Teilchen mit Spin:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\right)^2 - \vec{\mu}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) + q\,\phi(t,\vec{x})$$

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, $\quad \vec{\mu} = \gamma\vec{S}$

$\vec{S}$ ... Spinoperator

$$\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 = \vec{P}^2 - \frac{q}{c}\left(\vec{P}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{P}\right) + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2$$

$\vec{P}$ und $\vec{A}$ kommutieren i.a. nicht!

$$\vec{P}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{P} = [P_k, A_k] = -i\hbar\nabla_k A_k = -i\hbar\,\mathrm{div}\vec{A}$$

Kommutator verschwindet, falls $\mathrm{div}\vec{A} = 0$, z. B. homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ beschrieben durch $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{x}$

Klassische Mechanik: $m\vec{v} = \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$

Quantenmechanik (Heisenbergbild):

$$m\vec{V}(t) = m\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \frac{im}{\hbar}[H, \vec{X}(t)] = \vec{P}(t) - \frac{q}{c}\vec{A}(t, \vec{X}(t))$$

Kommutatorrelationen für Geschwindigkeitskomponenten:

$$[V_j, V_k] = \frac{1}{m^2}[P_j - \frac{q}{c}A_j, P_k - \frac{q}{c}A_k]$$

$$= -\frac{q}{m^2c}\Big(\underbrace{[P_j, A_k]}_{-i\hbar\nabla_j A_k} + \underbrace{[A_j, P_k]}_{i\hbar\nabla_k A_j}\Big) = \frac{i\hbar q}{m^2c}\underbrace{(\nabla_j A_k - \nabla_k A_j)}_{\varepsilon_{jkl}B_l}$$

d.h. $[V_x, V_y] = \frac{i\hbar q}{m^2c}B_z$, $[V_y, V_z] = \frac{i\hbar q}{m^2c}B_x$,

$$[V_z, V_x] = \frac{i\hbar q}{m^2c}B_y$$

→ in einem Magnetfeld sind die Operatoren der drei Komponenten der Teilchengeschwindigkeit <u>nichtkommutativ</u> ⇒ es gibt <u>keinen</u> Zustand, in dem alle drei Geschwindigkeitskomponenten gleichzeitig scharfe Werte haben

---

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{m\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}_{-\frac{q}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} + \frac{im}{\hbar}[H, \vec{V}] = q\left[\vec{E} + \frac{1}{2c}(\vec{V}\times\vec{B} - \vec{B}\times\vec{V})\right] + \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \underbrace{\gamma\vec{S}}_{\vec{\mu}}\times\vec{B}$$

1.3 Bewegung im homogenen Magnetfeld

$$\vec{B} = B\vec{e}_z$$

Bewegungsgleichungen:

$$\underbrace{m\dot{V}_x = \frac{q}{c} B V_y, \quad m\dot{V}_y = -\frac{q}{c} B V_x,}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(V_x + iV_y) = \underbrace{\frac{qB}{cm}}_{\omega :=}(V_y - iV_x)$$

$$= -i\omega (V_x + iV_y)$$

$$\Downarrow$$

$$(V_x + iV_y)(t) = e^{-i\omega t}(V_x + iV_y)(0)$$

$$= (\cos\omega t - i\sin\omega t)(V_x(0) + iV_y(0))$$

$$\Downarrow$$

$$V_x(t) = V_x(0)\cos\omega t + V_y(0)\sin\omega t$$

$$V_y(t) = V_y(0)\cos\omega t - V_x(0)\sin\omega t$$

$$m\dot{V}_z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$V_z(t) = \underbrace{V_z(0)}_{\dot{Z}(0)}$$

$$\Downarrow$$

$$Z(t) = Z(0) + \dot{Z}(0)\, t$$

Bewegung in x-y-Ebene einerseits und in z-Richtung andererseits <u>entkoppeln</u>

$$X(t) = \bar{X} + \frac{1}{\omega}\left[\dot{X}(0)\sin\omega t - \dot{Y}(0)\cos\omega t\right]$$

$$Y(t) = \bar{Y} + \frac{1}{\omega}\left[\dot{X}(0)\cos\omega t + \dot{Y}(0)\sin\omega t\right]$$

Bewegung erfolgt (klassisch gesehen) auf Schraublinie:

Projektion der Bahnkurve auf x-y-Ebene ($\perp \vec{B}$) =

= Kreis mit Mittelpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ und Radius

$$r = \frac{1}{|\omega|} \underbrace{\sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2}}_{v}$$

Vertauschungsrelationen:

wissen bereits: $[\dot{X}(t), \dot{Y}(t)] = \frac{i\hbar q}{m^2 c} B = \frac{i\hbar\omega}{m}$

„wie X und P"

mögliche Wahl des Vektorpotentials: $\vec{A} = Bx\, \vec{e}_y$

$$\mathrm{rot}\, \vec{A} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) Bx\, \vec{e}_y = B \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} \checkmark$$

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{m} P_x(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \frac{1}{m}\left(P_y(t) - \frac{q}{c} B\, X(t)\right) = \frac{1}{m} P_y(t) - \omega X(t)$$

$$\dot{Z}(t) = \frac{1}{m} P_z(t)$$

$$\overline{X} = X(0) + \frac{1}{\omega} \dot{Y}(0) = \frac{1}{m\omega} P_y(0)$$

$$\overline{Y} = Y(0) - \frac{1}{\omega} \dot{X}(0) = Y(0) - \frac{1}{m\omega} P_x(0)$$

$$\Rightarrow [\overline{X}, \overline{Y}] = -\frac{i\hbar}{m\omega}$$

$$[\overline{X}, \dot{X}(0)] = 0$$

$$[\overline{X}, \dot{Y}(0)] = 0$$

$$[\overline{Y}, \dot{X}(0)] = 0$$

$$[\overline{Y}, \dot{Y}(0)] = [Y(0) - \frac{1}{m\omega} P_x(0), \frac{1}{m} P_y(0) - \omega X(0)]$$

$$= \frac{+i\hbar}{m} - \frac{i\hbar}{m} = 0$$

$$\Rightarrow [\overline{X}, \dot{X}(t)] = [\overline{X}, \dot{Y}(t)] = [\overline{Y}, \dot{X}(t)] = [\overline{Y}, \dot{Y}(t)] = 0$$

Spektrum des Hamiltonoperators:

$$H = \frac{m}{2}(V_x^2 + V_y^2) + \frac{P_z^2}{2m} - \gamma B S_z$$

$$[V_x, V_y] = \frac{i\hbar\omega}{m} \rightarrow \text{harmonischer Oszillator!}$$

$$[V_{x,y}, P_z] = [V_{x,y}, S_z] = [P_z, S_z] = 0$$

Leiteroperatoren:

$$a = N(V_x + iV_y)$$

$$[a, a^\dagger] = |N|^2 [V_x + iV_y, V_x - iV_y] =$$

$$= |N|^2 \left(\frac{\hbar\omega}{m} + \frac{\hbar\omega}{m}\right) = \frac{2|N|^2\hbar\omega}{m}$$

falls $\omega > 0 \rightarrow N = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m}{2\hbar|\omega|}}$

falls $\omega < 0$ $\quad a \leftrightarrow a^\dagger$, d.h. $a = \mathcal{N}\,(V_x - i V_y)$, $\mathcal{N} = \sqrt{\frac{m}{2\hbar|\omega|}}$

in jedem Fall daher: $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$

$$a^\dagger a \overset{\omega>0}{=} \underbrace{|\mathcal{N}|^2}_{\frac{m}{2\hbar|\omega|}} \underbrace{(V_x - i V_y)(V_x + i V_y)}_{V_x^2 + V_y^2 + i \underbrace{[V_x, V_y]}_{\frac{i\hbar|\omega|}{m}}} = \frac{m}{2\hbar|\omega|}(V_x^2 + V_y^2) - \frac{1}{2}$$

ω bel.

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2}(V_x^2 + V_y^2) = \hbar|\omega|\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

$$H = \hbar|\omega|\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{P_z^2}{2m} - \gamma B S_z$$

mögliche Basis von (verallgemeinerten) Energie-eigenvektoren:

$|n, p_z, \sigma, \overline{x}\rangle$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots;\ p_z \in \mathbb{R};\ \sigma = -s, -s+1, \ldots, s;$
$\overline{x} \in \mathbb{R}$

$$H\,|n, p_z, \sigma, \overline{x}\rangle = \left[\hbar|\omega|\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m} - \hbar\gamma B\sigma\right]|n, p_z, \sigma, \overline{x}\rangle$$

$$P_z\,|n, p_z, \sigma, \overline{x}\rangle = p_z\,|n, p_z, \sigma, \overline{x}\rangle$$

$$S_z\,|n, p_z, \sigma, \overline{x}\rangle = \hbar\sigma\,|n, p_z, \sigma, \overline{x}\rangle$$

$$\overline{X}\,|n, p_z, \sigma, \overline{x}\rangle = \overline{x}\,|n, p_z, \sigma, \overline{x}\rangle$$

Bem.: $H, P_z, S_z, \overline{X}$ bilden einen vollständigen Satz miteinander kommutierender Operatoren

Projektion auf die Basis $|x,y,z,\tau\rangle$

$$P_z \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad \bar{X} \to -\frac{i\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$H \to \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - m\omega x\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$- \gamma B S_z$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{x},\tau | n, p_z, \sigma, \bar{x} \rangle \sim e^{-\frac{m|\omega|}{2\hbar}(x-\bar{x})^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m|\omega|}{\hbar}}(x-\bar{x})\right)$$

$$\times\, e^{\frac{im\omega\bar{x}y}{\hbar}} \, e^{\frac{ip_z z}{\hbar}} \, \delta_{\sigma\tau}$$

1.4 Die Stromdichte in einem Magnetfeld

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{c}\int d^3x\, \vec{j}\cdot\vec{A}$$ wenn Ladung räumlich verteilt

$$\Rightarrow \quad \delta L = \frac{1}{c}\int d^3x\, \vec{j}\cdot\delta\vec{A} = -\delta H$$

QM: Ausgangspunkt ist der Erwartungswert

$$\bar{H} = \int d^3x\, \psi^\dagger \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - \gamma\vec{B}\cdot\vec{S}\right]\psi$$

$$\Rightarrow \delta\bar{H} = \int d^3x\, \psi^\dagger \Big[-\frac{q}{2mc}\left(\vec{P}\cdot\delta\vec{A} + \delta\vec{A}\cdot\vec{P}\right) + \frac{q^2}{mc^2}\vec{A}\cdot\delta\vec{A}$$

$$- \gamma\left(\mathrm{rot}\,\delta\vec{A}\right)\cdot\vec{S}\Big]\psi$$

Nebenrechnungen:

$$\int d^3x\, \psi^\dagger \vec{P}\cdot\delta\vec{A}\psi = \int d^3x\, (\vec{P}\psi)^\dagger \cdot \delta\vec{A}\psi = i\hbar \int d^3x\, (\vec{\nabla}\psi)^\dagger \cdot \delta\vec{A}\psi$$

$$\int d^3x\, \psi^\dagger (\mathrm{rot}\,\delta\vec{A})\cdot\vec{S}\psi = \int d^3x\, \psi^\dagger \varepsilon_{jkl} (\nabla_k \delta A_l) S_j \psi$$

$$= -\int d^3x\, \varepsilon_{jkl}\, \delta A_l\, \nabla_k (\psi^\dagger S_j \psi) = \int d^3x\, \delta\vec{A}\cdot \mathrm{rot}\,(\psi^\dagger \vec{S}\psi)$$

$$\Rightarrow \delta\overline{H} = \int d^3x\, \delta\vec{A}\, \Big[\frac{i\hbar q}{2mc}\psi^\dagger \vec{\nabla}\psi - \frac{i\hbar q}{2mc}(\vec{\nabla}\psi)^\dagger \psi + \frac{q^2}{mc^2}\vec{A} - \mathrm{rot}\,(\psi^\dagger \underbrace{\gamma\vec{S}}_{\vec{\mu}}\psi)\Big]$$

$$= -\frac{1}{c}\int d^3x\, \delta\vec{A}\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{q}{2m}\Big[\psi^\dagger (\underbrace{-i\hbar\vec{\nabla}}_{\vec{P}} - \frac{q}{c}\vec{A})\psi + ((-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A})\psi)^\dagger \psi\Big] + c\,\mathrm{rot}(\psi^\dagger \vec{\mu}\psi)$$

T3: $\vec{j}_{mag} = c\,\mathrm{rot}\vec{M}$!

$$\vec{j} = \frac{q}{2}\left[\psi^\dagger(\vec{V}\psi) + (\vec{V}\psi)^\dagger \psi\right] + c\,\mathrm{rot}\,(\psi^\dagger\vec{\mu}\psi)$$

eichinvariant!

Ladungsdichte $\rho = q\,\psi^\dagger\psi$

Kontinuitätsgleichung $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$