Übungen zu Quantenmechanik II, Sommersemester 2014

- Die Bewegungsgleichung eines Operators $O(t)$ im Heisenbergbild lautet:

$$\frac{dO(t)}{dt} = \frac{\partial O(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H, O(t)].$$

- Der Hamiltonoperator eines Teilchens mit Masse m, Ladung q und Spin s, das sich in einem äußeren elektromagnetischen Feld befindet, lautet:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(t,\vec{X})\right]^2 + q\phi(t,\vec{X}) - \gamma\vec{S}\cdot\vec{B}(t,\vec{X}), \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}.$$

1. Berechnen Sie $\vec{V}(t) = d\vec{X}(t)/dt$.

2. Berechnen Sie $m\,d\vec{V}(t)/dt$.

3. Berechnen Sie $d\vec{S}(t)/dt$.

4. Bei der Bewegung eines Teilchens in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ ist die Zeitabhängigkeit der Operatoren $X(t)$ und $Y(t)$ durch

$$\begin{aligned} X(t) &= \bar{X} + \frac{1}{\omega}\left[\dot{X}(0)\sin\omega t - \dot{Y}(0)\cos\omega t\right], \\ Y(t) &= \bar{Y} + \frac{1}{\omega}\left[\dot{X}(0)\cos\omega t + \dot{Y}(0)\sin\omega t\right] \end{aligned}$$

gegeben (siehe VO). Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\dot{X}(t),\dot{Y}(t)],\ [\bar{X},\bar{Y}],\ [\bar{X},\dot{X}(t)],\ [\bar{X},\dot{Y}(t)],\ [\bar{Y},\dot{X}(t)],\ [\bar{Y},\dot{Y}(t)].$$

5. Ein spinloses Teilchen bewege sich in dem homogenen Magnetfeld des vorigen Beispiels. Der Operator der z-Komponente des *physikalischen* Bahndrehimpulses (bezüglich des Kreismittelpunktes $(\bar{X},\bar{Y})$) ist durch

$$L_z(t) = m\left[\left(X(t) - \bar{X}\right)\dot{Y}(t) - \left(Y(t) - \bar{Y}\right)\dot{X}(t)\right]$$

definiert. Zeigen Sie, dass der Operator L_z zeitlich konstant ist und drücken Sie ihn durch H aus.

6. Ladungs- und Stromdichte eines geladenenen Teilchens mit magnetischem Moment $\vec{\mu}$, das sich in einem äußeren elektromagnetischen Feld bewegt, sind durch

$$\rho = q\psi^\dagger \psi, \quad \vec{j} = \frac{q}{2}\left[\psi^\dagger \left(\vec{V}\psi\right) + \left(\vec{V}\psi\right)^\dagger \psi\right] + c\,\mathrm{rot}\left(\psi^\dagger \vec{\mu}\psi\right)$$

gegeben, wobei der Geschwindigkeitsoperator die Form

$$\vec{V} = \frac{1}{m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)$$

besitzt. Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$

erfüllt ist.

7. Wir betrachten das freie elektromagnetische Feld mit periodischen Randbedingungen in einer Schachtel $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$ mit dem Volumen $V = L_1 L_2 L_3$. Die allgemeine Lösung für das Vektorpotential in der Coulombeichung hat dann die Form

$$\begin{aligned} \vec{A}(t,\vec{x}) &= \sum_{\vec{k},\lambda}\left(\underbrace{\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}}_{\vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{x})}\underbrace{e^{-i\omega_{\vec{k}}t}b_{\vec{k},\lambda}}_{b_{\vec{k},\lambda}(t)} + \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}e^{+i\omega_{\vec{k}}t}b^*_{\vec{k},\lambda}\right) \\ k_i &= \frac{2\pi n_i}{L_i}, \ n_i \in \mathbb{Z}; \quad \omega_{\vec{k}} = c\left|\vec{k}\right|; \quad \vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'} \end{aligned}$$

Geben Sie die explizite Form des elektrischen und magnetischen Feldes an!

8. Zeigen Sie, dass sich mit der Konvention $\vec{\varepsilon}_{-\vec{k},1} = -\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}$, $\vec{\varepsilon}_{-\vec{k},2} = \vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}$ für die linearen Polarisationsvektoren die Beziehungen $\vec{\varepsilon}^{\,*}_{-\vec{k},\pm} = -\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\pm}$ für die zirkularen Polarisationsvektoren ergeben.

9. Zeigen Sie ($\lambda = \pm$):

$$\int_\Omega d^3x\, \vec{u}^{\,*}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{x})\cdot\vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k}'\vec{k}}\,\delta_{\lambda'\lambda}, \quad \int_\Omega d^3x\, \vec{u}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{x})\cdot\vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{x}) = -\delta_{\vec{k}',-\vec{k}}\,\delta_{\lambda\lambda'}.$$

10. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega d^3x \left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)^2 = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d^3x\,\vec{A}\cdot\ddot{\vec{A}}$$

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration, die Feldgleichung $\Box\vec{A} = 0$ und die Eichbedingung $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

11. Drücken Sie die Energie des elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{E}_{\text{Feld}} = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega d^3x\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega d^3x\left[\frac{1}{c^2}\dot{\vec{A}}^2 + \left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)^2\right]$$

durch die Fourierkoeffizienten $b_{\vec{k},\lambda}$ aus.

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat des vorigen Beispiels.

12. Drücken Sie den Impuls des elektromagnetischen Feldes

$$\vec{P}_{\text{Feld}} = \frac{1}{4\pi c}\int_\Omega d^3x\,\vec{E}\times\vec{B}$$

durch die Fourierkoeffizienten $b_{\vec{k},\lambda}$ aus.

Hinweis: Zeigen Sie, dass man mit Hilfe von partieller Integration und der Eichbedingung den Feldimpuls in der Form

$$P_i = -\frac{1}{4\pi c^2}\int_\Omega d^3x\,\dot{A}_j\nabla_i A_j$$

schreiben kann.

13. Berechnen Sie die Kommutatoren $[N_{\vec{k}',\lambda'}, a_{\vec{k},\lambda}]$, $[N_{\vec{k}',\lambda'}, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}]$, $[N, a_{\vec{k},\lambda}]$, $[N, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}]$, $[H, a_{\vec{k},\lambda}]$, $[H, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}]$, $[\vec{P}, a_{\vec{k},\lambda}]$, $[\vec{P}, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}]$.

14. Zeigen Sie, dass $a^\dagger_{\vec{k},\lambda}|0\rangle$ ein Eigenvektor von $N_{\vec{k}',\lambda'}$, N, H und $\vec{P}$ ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte.

15. Wie voriges Beispiel, jedoch für den Vektor

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger_{\vec{k},\lambda})^n|0\rangle.$$

Zeigen Sie, dass der angegebene Vektor auf eins normiert ist.

16. Ausgedrückt durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lautet der Feldoperator des freien elektromagnetischen Feldes:

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}}} \left(e^{-ik\cdot x} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} + h.k. \right), \quad k\cdot x = \omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x}.$$

Verifizieren Sie, dass seine zeitliche Änderung tatsächlich durch die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \vec{A}(t,\vec{x})}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left[H, \vec{A}(t,\vec{x}) \right]$$

bestimmt ist.

17. Zeigen Sie, dass die räumliche Änderung des Feldoperators durch die Gleichung

$$\nabla_j A_k(t,\vec{x}) = -\frac{i}{\hbar} \left[P_j, A_k(t,\vec{x}) \right]$$

beschrieben wird, wobei $\vec{P}$ der Impulsoperator des elektromagnetischen Feldes ist.

18. Überzeugen Sie sich davon, dass die in den beiden vorangegangenen Beispielen angegebenen Beziehungen der infinitesimalen Version der Raum-Zeit-Translation des Feldoperators

$$\vec{A}(x+a) = e^{iP\cdot a/\hbar} \vec{A}(x)\, e^{-iP\cdot a/\hbar}$$

entsprechen, wobei $P^\mu = \left(H/c, \vec{P} \right)$ und $x^\mu = (ct, \vec{x})$.

19. Hier sei $\Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Rightarrow$ Impulseigenzustände nicht auf eins normierbar):

$$|\vec{p}_1, \lambda_1; \ldots \vec{p}_n, \lambda_n\rangle := a(\vec{p}_1, \lambda_1)^\dagger \ldots a(\vec{p}_n, \lambda_n)^\dagger |0\rangle, \qquad \langle 0|0\rangle = 1.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n:

$$\langle \vec{p}_1, \lambda_1; \ldots \vec{p}_n, \lambda_n | \vec{p}_1', \lambda_1'; \ldots \vec{p}_n', \lambda_n' \rangle = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \delta^{(3)}\left(\vec{p}_i - \vec{p}_{\sigma(i)}' \right) \delta_{\lambda_i \lambda_{\sigma(i)}'},$$

wobei $\mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen von n Elementen bezeichnet.

20. Zeigen Sie, dass der Operator

$$P^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_n} \int d^3p_1 \ldots d^3p_n |\vec{p}_1, \lambda_1; \ldots \vec{p}_n, \lambda_n\rangle \langle \vec{p}_1, \lambda_1; \ldots \vec{p}_n, \lambda_n|$$

eine orthogonaler Projektor ist (d.h. $P^{(n)}$ ist hermitesch und idempotent).

21. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und $\psi_1, \ldots, \psi_n$ seien beliebige Vektoren eines Einteilchenhilbertraums $\mathcal{H}^{(1)}$. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n | \psi_1, \ldots, \psi_n \rangle$ der in der Vorlesung definierten Vektoren $|\varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle \in \mathcal{H}^{(n)}$ und $|\psi_1, \ldots, \psi_n\rangle \in \mathcal{H}^{(n)}$ durch die Permanente (für Bosonen) bzw. die Determinante (für Fermionen) der $n \times n$-Matrix mit den Elementen $\langle \varphi_i | \psi_j \rangle$ gegeben ist.

22. $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha=1,2,\ldots}$ sei ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathcal{H}^{(1)}$. Für den Fall von Bosonen bilden dann die Vektoren

$$\frac{|\alpha_1, \ldots \alpha_n\rangle}{\sqrt{\prod\limits_{\alpha=1}^{\infty} n_\alpha!}} \qquad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$$

ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathcal{H}^{(n)}$, wobei n_α angibt, wie oft α in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vorkommt. Überprüfen Sie die Normierung des angegebenen Vektors!

Hinweis: Berechnen Sie die Norm des Vektors

$$|\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle = |\underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_1}_{n_{\beta_1}}, \ldots, \underbrace{\beta_k, \ldots, \beta_k}_{n_{\beta_k}}\rangle, \qquad n_{\beta_1} + \ldots + n_{\beta_k} = n.$$

23. Beweisen Sie die im Fall von Bosonen *und* Fermionen geltende Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} |\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n| = \mathbb{1}^{(n)}.$$

Hinweis: Wenden Sie die linke Seite des obigen Ausdrucks auf den Vektor $|\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ an.

24. Zwischen zwei identischen, spinlosen Teilchen wirke eine Kraft, welche durch das Zweiteilchenpotential

$$V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) \equiv V^{(2)}(|\vec{x} - \vec{y}|)$$

beschrieben werde. Der entsprechende in $\mathcal{H}^{(2)}$ wirkende Operator ist dann durch

$$V^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3x \, d^3y \, |\vec{x}, \vec{y}\rangle V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) \langle \vec{x}, \vec{y}|$$

gegeben. Verifizieren Sie diese Behauptung durch Anwendung von $V^{(2)}$ auf den Zweiteilchenzustand $|\vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle$.

25. Zeigen Sie, dass der im Fockraum wirkende Operator

$$V = \frac{1}{2} \int d^3x\, d^3y\, a^\dagger(\vec{x}) a^\dagger(\vec{y}) V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) a(\vec{y}) a(\vec{x})$$

die Eigenschaft $V|\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\rangle = \sum_{i<j} V^{(2)}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)|\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\rangle$ hat.

26. Berechnen Sie die zeitliche Änderung des Vernichtungsoperators $a_\sigma(t, \vec{x})$ gemäß der Heisenberggleichung $\dot{a}_\sigma(t, \vec{x}) = (i/\hbar)[H, a_\sigma(t, \vec{x})]$ für den Hamiltonoperator

$$H(t) = \sum_\sigma \int d^3x\, a_\sigma^\dagger(t, \vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) a_\sigma(t, \vec{x}).$$

27. Wie lautet das Wirkungsintegral für eine nichtrelativistische Feldtheorie spinloser Teilchen zwischen denen eine durch das Zweikörperpotential $V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) \equiv V^{(2)}(|\vec{x} - \vec{y}|)$ beschriebene Wechselwirkung herrscht? Ermitteln Sie die daraus folgende Feldgleichung.

28. Prove the basic Gaussian integral formula

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp(-ax^2 + bx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \exp(b^2/4a), \quad a, b \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, a > 0.$$

Remark: In this formula, $\sqrt{a}$ is to be understood as $\sqrt{a} := \sqrt{|a|} e^{i\theta/2}$ where $a = |a| e^{i\theta},\ -\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Hint: Consider first the integral $I(a, 0)$. Its square,

$$I(a, 0)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-ay^2} = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, e^{-a(x^2+y^2)},$$

can easily be computed by introducing polar coordinates. Going back to $I(a, 0)$, the correct choice of the (ambiguous) squaring procedure can be determined by a continuity argument.

In the next step, relate the integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left(-a(x - c)^2\right), \quad c \in \mathbb{C}$$

to $I(a, 0)$ by using Cauchy's theorem.

29. Compute the n-dimensional Gaussian integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, \exp\left(-x^T A x/2\right),$$

where A is a real symmetric matrix with strictly positive eigenvalues, $x \in \mathbb{R}^n$ and $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$.

30. Compute the n-dimensional Gaussian integral with a source term $j \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, \exp\left(-x^T A x/2 + j^T x\right).$$

31. Compute the n-dimensional Fresnel integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, \exp\left(-i x^T A x/2\right), \quad A = A^T = A^* > 0, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Remark: This integral is to be understood as

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, \exp\left(-i x^T (A - i\varepsilon) x/2\right).$$

32. Determine

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, \exp(-i x^T A x/2 + i j^T x), \quad j \in \mathbb{R}^n.$$

33. Verify the convolution property

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, K_0(x_f, t_f; x, t) K_0(x, t; x_i, t_i) = K_0(x_f, t_f; x_i, t_i), \quad t_i < t < t_f,$$

of the free particle evolution kernel

$$K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)}} \exp\left(\frac{i m (x_f - x_i)^2}{2\hbar (t_f - t_i)}\right).$$

34. Verify that $\lim\limits_{t_f \to t_i} K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) = \delta(x_f - x_i)$.

35. Determine $K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i) \equiv \langle \vec{x}_f, t_f | \vec{x}_i, t_i \rangle$ for a free particle in three space dimensions.

36. The retarded Green function $G_r(t, \vec{x})$ of the Schrödinger equation describing the free motion of a particle with mass m in three spatial dimensions is determined by

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) G_r(t, \vec{x}) &= i\hbar \delta(t) \delta^{(3)}(\vec{x}), \\ G_r(t, \vec{x}) &= 0 \quad \text{for } t < 0. \end{aligned}$$

Compute the Fourier transform $\widetilde{G}(\omega, \vec{k})$ of the Green function. With its help, $G_r(t, \vec{x})$ can be derived using the residue theorem in the complex ω-plane.

37. Verify by explicit calculation: $K_0(\vec{x}, t; \vec{0}, 0)$ satisfies the Schrödinger equation

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) K_0(\vec{x}, t; \vec{0}, 0) = 0.$$

38. The operator C is defined by

$$e^{\varepsilon(A+B)} = e^{\varepsilon A} e^{\varepsilon B} e^{\varepsilon^2 C},$$

where ε is a small quantity. Express C to leading order in ε in terms of the (noncommuting) operators A, B. Hint: Expand both sides of the equation up to the necessary order in ε.

39. Formulate the path integral representation of $\langle \vec{x}_f, t_f | \vec{x}_i, t_i \rangle$ for a Lagrangian of the form

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m \dot{\vec{x}}^2}{2} - V(\vec{x})$$

in three spatial dimensions.

40. The action of a harmonic oscillator is given by

$$S[x] = \frac{m}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\dot{x}(t)^2 - \omega_0^2 x(t)^2\right].$$

Let $x_c(t)$ be the solution of the classical equation of motion,

$$\ddot{x}_c(t) + \omega_0^2 x_c(t) = 0.$$

Show that the classical action $S[x_c]$ can be expressed in terms of the boundary values of $x_c(t)$ and $\dot{x}_c(t)$ at $t = t_i, t_f$:

$$S[x_c] = \frac{m}{2}\left[x_f \dot{x}_c(t_f) - x_i \dot{x}_c(t_i)\right].$$

41. Argue that the classical solution $x_c(t)$ for the motion of the harmonic oscillator with boundary conditions $x_c(t_i) = x_i$ and $x_c(t_f) = x_f$ is given by

$$x_c(t) = x_i \frac{\sin\omega_0(t_f - t)}{\sin\omega_0(t_f - t_i)} + x_f \frac{\sin\omega_0(t - t_i)}{\sin\omega_0(t_f - t_i)}.$$

42. Verify the formula for the classical action of the harmonic oscillator:

$$S[x_c] = \frac{m\omega_0}{2\sin\omega_0(t_f - t_i)}\left[(x_i^2 + x_f^2)\cos\omega_0(t_f - t_i) - 2x_i x_f\right].$$

43. The harmonic oscillator kernel is given by

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\pi i\hbar\sin\omega_0(t_f - t_i)}}\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x_c]}.$$

Verify that $K(x, t; 0, 0)$

(a) satisfies the Schrödinger equation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x, t; 0, 0) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2\right)K(x, t; 0, 0),$$

(b) fulfils the normalization condition $K(x, 0; 0, 0) = \delta(x)$,

(c) and reduces to the free particle kernel for $\omega_0 \to 0$.

44. Compute

$$Z(t_f, t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, K(x, t_f; x, t_i)$$

and use the result to deduce the energy spectrum of the harmonic oscillator.

45. The one-dimensional harmonic oscillator is described by the Hamilton operator

$$H = \frac{P(t)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q(t)^2}{2} \ .$$

The position operator $Q(t)$ and the momentum operator $P(t)$ fulfil the canonical commutation relation

$$[Q(t), P(t)] = i\hbar \mathbb{1} \ .$$

(a) Verify that Heisenberg's equation of motion for $Q(t)$,

$$\dot{Q}(t) = \frac{i}{\hbar} \left[H, Q(t)\right] \ ,$$

implies the classical equation of motion $\ddot{Q}(t) + \omega^2 Q(t) = 0$.

(b) Express $Q(t)$ in terms of the ladder operators a and $a^\dagger$ which satisfy the commutation relation $\left[a, a^\dagger\right] = \mathbb{1}$.

(c) Calculate the two-point function $\langle 0|TQ(t_1)Q(t_2)|0\rangle$.

46. Determine the generating functional of the one-dimensional harmonic oscillator,

$$Z[f] = \langle 0|T e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)Q(t)}|0\rangle \ ,$$

using the path integral representation

$$Z[f] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int [dq] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}(t)^2 - \frac{m(\omega^2 - i\varepsilon)}{2} q(t)^2 + f(t)q(t) \right] \right\} \ .$$

Give a physical interpretation of the external field $f(t)$. Verify the result for the two-point function obtained with the operator method.

Hint: It is actually not necessary to “compute” the path integral. The only necessary ingredients are the translation invariance of the measure $[dq]$ and the normalization condition $Z[0] = 1$. (Consult your lecture notes!)

47. Die Vektoren $|0\rangle$, $|1\rangle, \ldots$ mögen ein vollständiges Orthonormalsystem eines unendlichdimensionalen Hilbertraums bilden. Der Operator T sei durch

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|$$

definiert. Zeigen Sie, dass T isometrisch aber nicht unitär ist.

48. Zeigen Sie, dass aus der Unitarität des S-Operators das **optische Theorem**

$$\operatorname{Im} f(\vec{p}, \vec{p}\,) = \frac{|\vec{p}\,|}{4\pi\hbar} \sigma(\vec{p}\,)$$

folgt, welches eine Beziehung zwischen dem Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude und dem totalen Wirkungsquerschnitt herstellt.

Hinweis: Schreiben Sie den S-Operator in der Form $S = \mathbb{1} + R$. Aus $S^\dagger S = \mathbb{1}$ folgt dann $R + R^\dagger = -R^\dagger R$. Multiplizieren Sie diese Gleichung von links mit $\langle \vec{p}\,'|$ und von rechts mit $|\vec{p}\,\rangle$. Nach einigen Umformungen gelangen Sie schließlich für $\vec{p}\,' \to \vec{p}$ zu der oben angegebenen Formel.

49. Beweisen Sie das folgende Lemma von Abel: In einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei $\psi(t) \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}^+$ mit $||\psi(t)|| \leq C < \infty \;\forall\; t \in \mathbb{R}^+$ und

$$s-\lim_{T\to\infty} \int_0^T dt\, \psi(t) \in \mathcal{H}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T dt\, \psi(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^\infty dt\, e^{-\epsilon t} \psi(t).$$

50. Zeigen Sie:

$$\langle \vec{x}|G_0(z)|\vec{x}\,'\rangle = -\frac{m e^{i\sqrt{2mz}|\vec{x}-\vec{x}\,'|/\hbar}}{2\pi\hbar^2 |\vec{x}-\vec{x}\,'|}, \qquad z \notin \sigma(H_0) = \mathbb{R}^+,\ \operatorname{Im}\sqrt{z} \geq 0.$$

Hinweis: Nach Durchführung der Winkelintegration erhalten Sie ein eindimensionales Integral, das Sie mit Hilfe des Residuensatzes berechnen können.

51. Wie in der Vorlesung besprochen, hat die Streulösung in großer Entfernung vom Streuzentrum die Form

$$\langle \vec{x}|\vec{p}\,\mathrm{ein}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\left[e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} + \frac{e^{i|\vec{p}|r/\hbar}}{r} f(\vec{p}\,', \vec{p}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right], \; \vec{p}\,' = |\vec{p}|\vec{n}, \; |\vec{n}| = 1.$$

Diese stationäre Wellenfunktion besteht also aus einer einlaufenden ebenen Welle und einer auslaufenden (richtungsmodulierten) Kugelwelle. Überzeugen Sie sich davon, dass man die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega = \frac{\text{durch } d\Omega \text{ tretender Wahrscheinlichkeitsstrom}}{\text{einfallende Wahrscheinlichkeitsstromdichte}}$$

erhält.

52. Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchens in dem Yukawapotential

$$V(r) = \gamma \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

in niedrigster Bornscher Näherung.

53. Verwenden Sie das Resultat des vorigen Beispiels um den dazugehörigen totalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen. Diskutieren Sie die Grenzfälle großer und kleiner Energien.

54. Zeigen Sie die folgenden Aussagen für die Terme n-ter Ordnung der Bornschen Reihe der Streuamplitude $f(\vec{p}\,', \vec{p})$.

   (a) Aus der Definition von $f^{(1)}(\vec{p}\,', \vec{p})$ folgt, dass $\mathrm{Im} f^{(1)}(\vec{p}, \vec{p})$ verschwindet.

   (b) Aus dem optischen Theorem folgt, dass

   $$\mathrm{Im} f^{(2)}(\vec{p}, \vec{p}) = \frac{p}{4\pi\hbar} \int d\Omega\, |f^{(1)}(\vec{p}\,', \vec{p})|^2.$$

   (c) $\mathrm{Im} f^{(3)}(\vec{p}, \vec{p}) = ?$

   (d) $\mathrm{Im} f^{(4)}(\vec{p}, \vec{p}) = ?$

Hinweis: Beachten Sie, dass auf der linken und auf der rechten Seite Terme von gleicher Ordnung in der Bornschen Entwicklung stehen müssen.

55. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte des Streuoperators in einem radialsymmetrischen Potential $V(r)$ nicht von der „magnetischen Quantenzahl" m abhängen.

    Hinweis: Beachten Sie, dass S mit allen Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{L}$ vertauscht, also insbesondere auch mit den Leiteroperatoren $L_\pm$. Verwenden Sie die Ihnen aus T2 bekannten Eigenschaften von $L_\pm$ um zu zeigen, dass

$$\langle \dots, m+1|S|\dots, m+1\rangle = \langle \dots, m|S|\dots, m\rangle$$

    gilt.

56. Rechnen Sie nach, dass die Impulsraumwellenfunktionen

$$\langle \vec{p}\,|E,\ell,m\rangle = \frac{1}{\sqrt{mp}}\delta(E_{\vec{p}}-E)Y_{\ell m}(\hat{\vec{p}}), \qquad \hat{\vec{p}} := \vec{p}/p,$$

    tatsächlich gemäß

$$\langle E',\ell',m'|E,\ell,m\rangle = \delta(E'-E)\,\delta_{\ell'\ell}\,\delta_{m'm}$$

    normiert sind.

57. Ein sogenanntes **separables Potential** ist durch

$$V = \lambda|\phi\rangle\langle\phi|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

    definiert, wobei $|\phi\rangle$ ein normierter Vektor ist. Die dazugehörige Impulswellenfunktion werde mit $\phi(\vec{p})$ bezeichnet.

    Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Operator $T(z)$ die explizite Form

$$T(z) = \frac{V}{1-\lambda\Delta(z)}$$

    besitzt, wobei

$$\Delta(z) = \langle\phi|G_0(z)|\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p\,\frac{|\phi(\vec{p})|^2}{z-E_{\vec{p}}}.$$

    Hinweis: Verwenden Sie die Definition $T(z) = V + VG(z)V$ um zu zeigen, dass der Operator die Gestalt $T(z) = \alpha(z)|\phi\rangle\langle\phi|$ besitzt. Verwenden Sie sodann die Lippmann-Schwinger-Gleichung $T(z) = V + VG_0(z)T(z)$ um die Funktion $\alpha(z)$ zu bestimmen.

58. Wie lautet die Bornsche Reihe für den Operator $T(z)$ des separablen Potentials? Was können Sie über ihr Konvergenzverhalten sagen?

59. Geben Sie die Streuamplitude sowie den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt für das separable Potential an.

60. Verifizieren Sie das optische Theorem für das separable Potential.

61. Ein antilinearer Operator $W : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt antiunitär, falls W surjektiv und isometrisch ist:

    (a) $W(a\varphi + b\psi) = a^* W\varphi + b^* W\psi \;\; \forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{H}, \;\; \forall\, a, b \in \mathbb{C}$ (antilinear),

    (b) $\operatorname{im} W = \mathcal{H}$ (surjektiv),

    (c) $\| W\psi \| = \| \psi \| \;\; \forall\, \psi \in \mathcal{H}$ (isometrisch).

    Zeigen Sie, dass dann $\langle W\varphi | W\psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle \;\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{H}$ gilt.

62. Verifizieren Sie die Gruppeneigenschaften für $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ und $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

63. Zeigen Sie, dass die Drehung eines Vektors $\vec{x}$ im dreidimensionalen Raum mit dem Drehwinkel α um die Drehachse $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$, Rechte-Hand-Regel) durch $\vec{x}' = R(\vec{\alpha})\vec{x} = \cos\alpha\, \vec{x} + (1 - \cos\alpha)\, \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) + \sin\alpha\, \vec{n} \times \vec{x}, \;\; \vec{\alpha} = \alpha\, \vec{n}$, beschrieben wird. Geben Sie die Matrixdarstellung von $R(\vec{\alpha})$ bezüglich der Standard-Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ an.

    Hinweis: Zerlegen Sie den Vektor $\vec{x}$ in einen Anteil parallel bzw. normal zur Drehachse und verwenden Sie die Linearität der Transformation $R(\vec{\alpha})$.

64. Zeigen Sie, dass jedes $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ für eine geeignete Wahl des Drehvektors $\vec{\alpha}$ stets in der Form $A = R(\vec{\alpha})$ geschrieben werden kann.

    Hinweis: Fassen Sie A als Element von $L(\mathbb{C}^3)$ auf. Was folgt für die Eigenwerte und Eigenvektoren von A aus den Bedingungen $A^* = A$, $A^T A = \mathbb{1}$ und $\det A = 1$? Verwenden Sie den Spektralsatz für normale Operatoren, um Ihr Endresultat zu erhalten.

65. Überprüfen Sie, dass $U(s) := e^{i\vec{X}\cdot\vec{q}s/\hbar} e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}s/\hbar} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{a}s^2/2\hbar}$ unitär ist und $U(s_1)U(s_2) = U(s_1 + s_2)$, $U(0) = \mathbb{1}$ erfüllt. Berechnen Sie $dU(s)/ds$, um zu zeigen, dass $U(s) = e^{i(\vec{X}\cdot\vec{q} - \vec{P}\cdot\vec{a})s/\hbar}$ gilt.

66. Zeigen Sie

$$U(\vec{\alpha}) := e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}/2} = \cos\frac{\alpha}{2} - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\alpha}{2}$$

auf wenigstens zwei verschiedene Arten! In dieser Formel bezeichnen $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die Paulischen Spinmatrizen, $\vec{n}$ ist ein Einheitsvektor in Richtung des Drehvektors $\vec{\alpha} = \alpha\vec{n}$.

67. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma_i U(\vec{\alpha})\sigma_j U(\vec{\alpha})^\dagger\right) = (R(\vec{\alpha}))_{ij}$$

68. Zeigen Sie, dass man U $\in$ SU(2) aus dem dazugehörigen R $\in$ SO(3) durch die Formel

$$U = \pm\frac{\mathbb{1}_2 + R_{ij}\sigma_i\sigma_j}{2\sqrt{1+\mathrm{Tr}R}}$$

erhält.

69. Der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ eines Teilchens mit Spin s setzt sich aus dem Bahndrehimpuls $\vec{L}$ und dem Spindrehimpuls $\vec{S}$ zusammen. Bei gegebenem Bahndrehimpuls ℓ kommen daher für den Gesamtdrehimpuls j die Werte

$$j = \ell + s,\ \ell + s - 1,\ \ldots,\ |\ell - s|$$

in Frage. Berechnen Sie für $\ell = 1$ und $s = 1/2$ alle in den Produkten

$$|\ell, m\rangle \otimes |1/2, \sigma\rangle \equiv |\ell, m; s, \sigma\rangle$$

vorkommenden Zustände $|j, j_3\rangle$.

70. Berechnen Sie alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten für $j_1 = j_2 = 1$ und vergleichen Sie mit den Werten der Tabelle der Particle Data Group.

71. Rechnen Sie nach, dass die durch $(t_m)_{kl} = -i\varepsilon_{mkl}$ definierten 3×3-Matrizen t_1, t_2, t_3 die Kommutatorrelationen der su(2) erfüllen (adjungierte Darst.).

72. $\vec{X}$ sei der Drehimpulsoperator eines spinlosen Teilchens. Verifizieren Sie durch Berechnung der Kommutatoren mit den Bahndrehimpulsoperatoren L_3 und $L_\pm$, dass

$$T_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + iX_2), \quad T_0^{(1)} = X_3, \quad T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - iX_2)$$

die Komponenten eines irreduziblen Tensoroperators erster Stufe bilden.

73. Was folgt aus dem Wigner-Eckart-Theorem für $\langle n,\, \ell,\, m|X_3|n',\, \ell',\, m'\rangle$?

74. Lösen Sie Aufgabe 55 mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems.

75. Zeigen Sie, dass aus

$$e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{J}/\hbar}T_m^{(j)}e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{J}/\hbar} = \sum_{m'} T_{m'}^{(j)} D_{m'm}^{(j)}(\vec{\alpha})$$

die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \left[J_3, T_m^{(j)}\right] &= \hbar m T_m^{(j)}, \\ \left[J_+, T_m^{(j)}\right] &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}T_{m+1}^{(j)}, \\ \left[J_-, T_m^{(j)}\right] &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}T_{m-1}^{(j)} \end{aligned}$$

folgen.

76. In der Vorlesung wurde der Operator

$$F := \sum_{m,m_1,m_2} |j_1, m_1\rangle\langle\alpha_1, j_1, m_1|T_m^{(j)}|\alpha_2, j_2, m_2\rangle\langle j, m; j_2, m_2|$$

definiert. Zeigen Sie, dass $FD(A) = D_1(A)F \ \ \forall\, A \in \mathrm{SU}(2)$ gilt, wobei $D_1 = D^{(j_1)}$.