# Übungen zu T4 Statistische Physik im SS 2013

Aufgabe 28

Ein Mensch liegt in einem Kernspintomografen mit einem Magnetfeld der Stärke 5 T (Tesla). Wieviel Prozent der Protonen im Körper stellen den Spin in Richtung des Magnetfelds ein? Hinweis: Das magnetische Moment eines Protons ist 2,793 $\mu_N$ mit dem Kernmagneton $\mu_N = e\hbar/(2m_pc) = 3,152 \cdot 10^{-14}\mathrm{MeVT}^{-1}$.

Aufgabe 29

Ein idealer Paramagnet in einem äußeren Magnetfeld $\vec{H} = (0,0,H)$ hat eine freie Energie der Form

$$F(T,H,N) = -NkT\Phi(\frac{\mu_B H}{kT}),$$

wo $\Phi$ eine nicht näher bestimmte Funktion und $\mu_B$ das Bohrsche Magneton ist. Die Magnetisierung ist definiert als $\vec{M} = \frac{N}{V}\vec{m}$, wo $\vec{m}$ das mittlere magnetische Moment eines Teilchens ist.

a) Zeigen Sie $\vec{M} = (0,0,M)$ mit $M = -\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial H}$.

b) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Wärmekapazität $C_H$ bei konstantem $H$ und der magnetischen Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial M}{\partial H}$ her.

Aufgabe 30

a) Leiten Sie die Positivität der Wärmekapazität $C_V$ aus der Konkavität von $S(U,V,N)$ in der Variablen $U$ her.

Anleitung: Gewinnen Sie $C_V$ aus der freien Energie und verwenden Sie das Verhalten der Konkavität einer Funktion unter Funktionsumkehr und Legendretransformation.

b) Ein System mit negativer Wärmekapazität und Temperatur $T_1$ wird in thermischen Kontakt mit einem anderen System mit Temperatur $T_2$ gebracht. Was wird passieren?

Aufgabe 31

Zwei ursprünglich voneinander isolierte Systeme mit den Temperaturen $T_{1,2}$ und Wärmekapazitäten $(C_V)_{1,2}$ werdem in thermischen Kontakt gebracht. Wie lautet die Gleichung für die Temperatur $T$, die sich im Gleichgewicht für das Gesamtsystem einstellt? Berechnen Sie $T$ für den Fall, dass die Wärmekapazitäten im relevanten Temperaturbereich konstant sind.

Aufgabe 32

Zeigen Sie zu Aufgabe 31, dass die Entropie nach dem Temperaturausgleich größer ist als davor.

Aufgabe 33

Informationsbasierte Herleitung des kanonischen Ensembles:

a) Bestimmen Sie die stationäre Dichtematrix $\rho$ mit maximaler von Neumann-Entropie unter der Nebenbedingung $< H >= U$ bei gegebenem Energiespektrum $\{E_n\}$. Die Eigen-

werte $\rho_n$ ergeben sich als proportional zu $e^{-\beta E_n}$ mit einer Konstante $\beta$.
b) Klären Sie die Bedeutung von $\beta$, indem Sie mit Hilfe von $\rho$ die innere Energie $U(\beta)$ und die Entropie $S(\beta)$ und aus diesen die Temperatur berechnen.

Aufgabe 34

Geben Sie eine informationsbasierte Herleitung des großkanonischen Ensembles, indem Sie zu Aufgabe 33 die Nebenbedingung $< \hat{N} >= N$ hinzunehmen. Maximierung der von Neumann-Entropie bestimmt dann die Eigenwerte der Dichtematrix zu $\rho_i^{(n)} \propto e^{-\beta E_i^{(n)} - \alpha n}$ ($E_i^{(n)}$ sind die Energieeigenwerte und $n$ die Eigenwerte von $\hat{N}$). Die Interpretation der Parameter $\beta$ und $\alpha$ gelingt mit Hilfe der Funktionen $S(\beta, \alpha)$, $U(\beta, \alpha)$ und $N(\beta, \alpha)$.