Übungen zu T4 Statistische Physik im SS 2013

Aufgabe 14

Zerlegen Sie den allgemeinsten Zustand über der Algebra der 2x2-Matrizen in eine konvexe Linearkombination eines reinen Zustands und des Spurzustands. Geben Sie eine geometrische Deutung dieser Zerlegung.

Aufgabe 15

Berechnen Sie den Erwartungswert einer hermitischen 2x2-Matrix im reinen Zustand $\psi = (cos\alpha, e^{i\beta} sin\alpha)e^{i\gamma}$. Mitteln Sie diesen Erwartungswert über die Winkel α und β und bestimmen Sie die entsprechende Dichtematrix.

Aufgabe 16

Ein aus zwei Spins bestehendes System werde durch den reinen Zustand $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> \otimes |\downarrow> + e^{i\alpha}|\downarrow> \otimes |\uparrow>)$ beschrieben. Angenommen es werden nur Messungen am ersten Spin durchgeführt. Durch welche Dichtematrix wird in diesem Fall der Zustand effektiv beschrieben?

Aufgabe 17

Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^N x exp(-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_N^2) \tag{1}$$

auf zwei Arten: Zunächst durch Integration über die Variablen $x_1, ..., x_N$ und dann durch Einführen einer Radialkoordinate. Deduzieren Sie daraus einen Ausdruck für den Flächeninhalt der Einheitssphäre in N Dimensionen. Wie groß ist daher das Volumen einer N-dimensionalen Kugel vom Radius R?

Aufgabe 18

a) Gewinnen Sie aus Aufgabe 17 eine Integraldarstellung für $N!$, nähern Sie den Integranden durch eine Gaußfunktion und leiten Sie daraus eine Näherungsformel für $N!$ her, die gut für große N ist.

b) Welcher gröbere Näherungsausdruck für $N!$ ergibt sich, wenn man $ln(N!)$ durch ein Integral nähert?

Aufgabe 19

Die Funktion $\Omega(y) = Ky^{N_1}(L-y)^{N_2}$ $(0 \le y \le L)$ mit sehr großen Zahlen $N_{1,2}$ tritt in der statistischen Behandlung von Teilchen in einem durch eine Zwischenwand geteilten Volumen auf.

a) Geben Sie zwei physikalische Interpretationen dieser Funktion an.

b) Nähern Sie $\Omega(y)$ durch eine Gaußfunktion

$$\Omega_G(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp(-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}).$$

Bestimmen Sie $\bar{y}$ und σ als Funktion von $N_{1,2}$ und L. Anleitung: Berechnen Sie zuerst die Lage $\bar{y}$ des Maximums Ω_{max} von $\Omega(y)$ und setzen Sie dann Ω als $\Omega(y) = \Omega_{max} exp(g(y)$ an. Durch Entwicklung von g um $y = \bar{y}$ erhalten Sie die Schwankung σ.

Aufgabe 20

Vergleichen Sie die Energie, die Sie zum Erhitzen des Wassers für ein Vollbad brauchen, mit der potentiellen Energie eines Menschen auf dem Mt. Everest und weiters mit der Energie, die Sie in Form von Nahrung an einem Tag zu sich nehmen.