Übungen zu T4 Statistische Physik im SS 2013

Aufgabe 8

Zeigen Sie: Sind $\{p_i\}$ und $\{q_i\}$ zwei diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen gleicher Mächtigkeit, dann ist $-\sum p_i ln p_i \leq -\sum p_i ln q_i$. Welche obere Schranke folgt daraus für die *relative Entropie* $\mathcal{S}_{rel}(\{p_i\},\{q_i\}) \equiv -k\sum p_i ln\frac{p_i}{q_i}$?

Aufgabe 9

Seien X, Y zwei diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\{p_i\}_{i\in I}$, $\{q_j\}_{j\in J}$ und gemeinsamer Verteilung $\{P_{ij}\}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Ungleichung aus Aufgabe 8, dass für die entsprechenden statistischen Entropien gilt $\mathcal{S}(\{P_{ij}\}) \leq \mathcal{S}(\{p_i\}) + \mathcal{S}(\{q_j\})$. Warum ist dieses Resultat von vornherein zu erwarten?

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass die Gaußverteilung diejenige Verteilung ist, die bei gegebener Varianz die maximale statistische Entropie hat, und berechnen Sie diese.

Aufgabe 11

Geben Sie eine Dichtefunktion $\rho(x)$ an, für die $\mathcal{S}[\rho]$ negativ ist.

Aufgabe 12

Gegeben sei eine klassische Hamiltonfunktion $H(q_i, p_j)$ auf dem Phasenraum mit Koordinaten $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$. Lösen Sie für gegebene Anfangsdaten $q_i(0)$, $p_i(0)$ die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für $q_i(t)$, $p_i(t)$ für kleines $t = \epsilon$ bis zur linearen Ordnung in ϵ, berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung $(q_1(0), \ldots, p_n(0)) \mapsto (q_1(\epsilon), \ldots, p_n(\epsilon))$ und zeigen Sie, dass ihre Determinante in der betrachteten Ordnung gleich 1 ist. Schließen Sie daraus, dass das Volumen eines beliebigen Gebiets G im Phasenraum unter der Zeitentwicklung $G(0) \mapsto G(t)$ invariant ist.

Aufgabe 13

Zeigen Sie: Die durch die Dichtefunktion $\rho(\vec{q}, \vec{p}, t)$, die die Zeitentwicklung eines klassischen Zustands beschreibt, definierte Wahrscheinlichkeit P_t hat die Eigenschaft $P_t(G(t)) = const$. Schließen Sie aus dieser Eigenschaft und dem Resultat von Aufgabe 12, dass die Dichtefunktion die Gleichung $\frac{d\rho}{dt} = 0$ erfüllt, wobei $\frac{d}{dt}$ die totale Zeitableitung bedeutet.