Übungen zu T4 Statistische Physik im SS 2013

Aufgabe 1

Wie viele Leute müssen auf einer Party sein, um erwarten zu können, dass
a) ein Teilnehmer denselben Geburtstag hat wie Sie;
b) zwei Teilnehmer (untereinander) denselben Geburtstag haben?
(Mit Geburtstag ist der Kalendertag ohne Jahreszahl gemeint.)

Aufgabe 2

Ein bestimmtes Wetterereignis tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 Prozent im Lauf eines Jahres ein. Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert es im Lauf eines Jahrzehnts
a) mindestens einmal;
b) genau einmal?

Aufgabe 3

Sei $\rho(x,p)$ die Phasenraumverteilung eines klassischen Teilchens in einer Dimension. $\Delta^c x$, $\Delta^c p$ seien die Standardabweichungen von x bzw. p. Die Kovarianz der Verteilung ist definiert durch $\Delta^c(xp) = \langle xp\rangle - \langle x\rangle\langle p\rangle$. Beweisen Sie die Ungleichung $|\Delta^c(xp)| \leq (\Delta^c x)(\Delta^c p)$. Wann gilt die Gleichheit?
(Anleitung: Verwenden Sie die Ungleichung von Cauchy-Schwarz.)

Aufgabe 4

Das quantenmechanische Analogon der Ungleichung aus Aufgabe 3 ist die *verallgemeinerte Unschärferelation*. Für beliebige hermitische Operatoren A, B lautet sie

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 - (\Delta(AB))^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

mit der quantenmechanischen Kovarianz $\Delta(AB) := \langle\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A}\rangle/2$, wobei $\bar{A} \equiv A - \langle A\rangle$. Wie üblich bezeichen $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$ den quantenmechanischen Erwartungswert in einem reinen Zustand (ψ) und $(\Delta A)^2 = \langle\bar{A}^2\rangle$ das Schwankungsquadrat. Um die verallgemeinerte Unschärferelation zu beweisen, betrachten Sie die Ungleichung $0 \leq \|(\bar{A} + \lambda\bar{B})|\psi\rangle\|^2$, die für beliebige komplexe Zahlen $\lambda = \alpha + i\beta$, α, β reell, gilt. Ergänzen Sie die Terme, die α bzw. β enthalten, jeweils zu einem vollständigen Quadrat und beachten Sie, dass $i\langle[A,B]\rangle$ reell ist.

Aufgabe 5

Die allgemeinste Gauß-Verteilung für das Teilchen aus Aufgabe 3 hat die Form

$$\rho_G(x,p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{u}} e^{-\frac{(p-p_0)^2\alpha}{4u} - \frac{(x-x_0)^2(1+4b^2\alpha^2)}{\alpha} + \frac{2b\alpha}{\sqrt{u}}(x-x_0)(p-p_0)}$$

mit $\alpha > 0$, $u > 0$ und $x_0, p_0, b \in \mathbf{R}$. Verifizieren Sie dafür $(\Delta^c x)^2 = \alpha/2$, $(\Delta^c p)^2 = (2u/\alpha)(1 + 4b^2\alpha^2)$ und $\Delta^c(xp) = 2b\alpha\sqrt{u}$.

Aufgabe 6

Das allgemeinste Gauß'sche Wellenpaket in einer Dimension wird beschrieben durch

$$\psi_G(x) = (\pi\alpha)^{-1/4} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\alpha} + \frac{ip_0(x-x_0)}{\hbar} + ia(x-x_0)^2 + i\phi}$$

mit $\alpha > 0$ und $x_0, p_0, a, \phi \in \mathbf{R}$. Zeigen Sie, dass die verallgemeinerte Unschärferelation für x, p saturiert wird. Verifizieren Sie, dass die klassischen und quantenmechanischen Werte der Varianzen und der Kovarianz von x, p übereinstimmen, wenn man in Aufgabe 5 $b = a$ und $u = \hbar^2/4$ setzt.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die klassischen Randverteilungen $\rho_x(x) = \int dp \rho_G(x,p)$ und $\rho_p(p) = \int dx \rho_G(x,p)$ mit den quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $|\psi_G(x)|^2$ und $|\tilde{\psi}_G(p)|^2$ für die spezielle Parameterwahl aus Aufgabe 6 übereinstimmen. Wird es eine derartige klassische Wahrscheinlichkeitsinterpretation auch für allgemeinere Wellenfunktionen geben? ($\tilde{\psi}$ ist die Wellenfunktion im Impulsraum.)