MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK 1

Helmuth Hüffel
Fakultät für Physik der Universität Wien

Vorlesungsskriptum
Sommersemester 2013

Umgesetzt in LYX von Johannes Horak

Version vom 22-03-2013

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Arfken, George B. und Hans-Jurgen Weber: *Mathematical methods for physicists.* Elsevier Acad. Press, Amsterdam [u.a.], 2005.

[2] Berendt, G. und E. Weimar: *Mathematik für Physiker*, Band 1. Physik-Verlag, 1990.

[3] Berendt, G. und E. Weimar: *Mathematik für Physiker*, Band 2. Physik-Verlag, 1990.

[4] Heinzle, Mark: *Mathematische Methoden der Physik I, Skriptum.* Sommersemester 2010, Version vom 3.5.2010.

[5] Kamke, Erich: *Differentialgleichungen Loesungsmethoden und Loesungen.* Teubner, Stuttgart, 1983.

[6] Lang, Christian B. und Norbert Pucker: *Mathematische Methoden in der Physik.* Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, 2005.

[7] Marsden, J. E. und M. J. Hoffmamn: *Basic Complex Analysis.* Freeman and Company, 1987.

[8] Neufeld, Helmut: *Mathematische Methoden der Physik I, Skriptum.* Somersemester 2008, Version vom 10.2.2012.

Vorwort

Dieses Skriptum lehnt sich zu einem großen Ausmaß an das vorangegangene Skriptum 2012 an, wird jedoch laufend Ergänzungen und Verbesserungen aufweisen. Für Hinweise auf Tippfehler und weitere Anregungen bin ich sehr dankbar.

Helmuth Hüffel

Wien, im März 2013

Kapitel 1

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine *Differentialgleichung* (DGL) ist eine Gleichung, in der die Variable x, die gesuchte Funktion $y(x)$ sowie deren Ableitungen vorkommen.

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* in einer Variable x und einer gesuchten Funktion $y(x)$ ist von der Form

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Die höchste auftretende (n-te) Ableitung heißt *Ordnung* der Differentialgleichung.

Beispiel (Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung)**.**

$$(y')^2 + y^2 = 1$$

Einen bedeutenden Spezialfall stellt die *lineare gewöhnliche Differentialgleichung* dar: sie ist linear in $y, y', y'', \ldots$

Beispiel (Lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung)**.**

$$y'' + y = 0 \tag{1.1}$$

mit Lösung (c_1, c_2 Konstanten)

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{1.2}$$

Bemerkung (Notation). Motiviert von der physikalischen Anwendung heißt die Variable oft t (*time*) und die gesuchte Funktion $x(t)$; die Ableitung nach t wird mit einem Punkt bezeichnet, $\dot{x}(t)$. In dieser Schreibweise lauten die obige DGL (1.1) und ihre Lösung (1.2)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= 0 \\ x(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{aligned}$$

Fragen, die im Zusammenhang mit DGL auftreten, sind insbesondere nach *Existenz*, *Eindeutigkeit* und *Gesamtheit* der Lösungen.

Ein *Anfangswertproblem* gibt Werte zu einer DGL ausschließlich an derselben Stelle vor,

$$y(x_0), y'(x_0), \ldots$$

bzw.

$$x(t_0), \dot{x}(t_0), \ldots$$

Ein Randwertproblem gibt dagegen Werte an verschiedenen Stellen vor, z. B. ($x_0 \neq x_1$)

$$y(x_0), y(x_1)$$

bzw.

$$x(t_0), x(t_1)$$

Beispiel (Randwertproblem)**.**

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass $y(x) = 0$ für alle x. Dieses Randwertproblem hat damit *keine nichttriviale* Lösung!

Wir ändern unsere Fragestellung und wollen jetzt wissen, zu welchen Werten $\lambda \in \mathbb{C}$ es Lösungen $y(x)$ gibt, die

$$y'' + \lambda y = 0$$

erfüllen, und wie alle diese λ_n und $y_n(x)$ (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) lauten. Ein Beispiel für eine solche Situation liefert die Quantenmechanik (QM): Für welche Energiewerte hat die Schrödingergleichung eines Elektrons im Wasserstoffatom Lösungen?

1.1 Gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Peano, Picard-Lindelöf; ohne Beweis))**.** *Sei*

$$y' = f(x, y)$$

Wenn f stetig im rechteckigen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ist, sowie in G die Lipschitzbedingung *erfüllt, so gibt es für jedes $(x_0, y_0) \in G$ genau eine Lösung der DGL, die in einer Umgebung von x_0 definiert ist, $y(x_0) = y_0$ erfüllt und stetig von (x_0, y_0) abhängt.*

Definition (Lipschitzbedingung)**.** Die Funktion f erfüllt im rechteckigen Gebiet G eine Lipschitzbedingung, wenn es ein $N > 0$ gibt, sodass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in G$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N\,|y_2 - y_1|$$

Bemerkung. Für uns genügt die schwächere Version für Existenz und Eindeutigkeit, dass f in einem rechteckigen Gebiet *stetig* sein und eine *beschränkte partielle Ableitung nach y* haben soll, d. h.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| < N$$

für $N > 0$ gelten soll.

Beispiel.

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Voraussetzung des Eindeutigkeitssatzes ist für jedes Rechteck um $(0, 1)$ mit $y \geq a$, $a > 0$ erfüllt: Einerseits ist in solch einem Rechteck

$$f(x, y) = \sqrt{y}$$

stetig, andererseits ist

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

beschränkt, da $a > 0$. Also existiert für $y(0) = 1$ eine eindeutige Lösung. Die explizite Lösung wird in den Übungen berechnet.

Speziell für

$$y' + f(x)y = g(x)$$

lautet der Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Wenn $f(x)$, $g(x)$ auf einem abgeschlossenen Intervall stetig sind, dann gibt es eine eindeutige Lösung, die die Anfangsbedingung $y(x_0)$, $x_0 \in I$ erfüllt.

Schließlich für

$$y'' = f(x, y, y')$$

ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz wie folgt:

Wenn f stetig im zylindrischen Gebiet $G = I \times K_2$ (wo $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $K_2 \in \mathbb{R}^2$ Kreisscheibe) ist, und partielle Ableitungen nach y, y' besitzt, so existiert eine eindeutige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \eta_0 \\ y'(x_0) &= \eta_1 \end{aligned}$$

erfüllt.

1.1.1 Typ getrennte Variable

$$\begin{aligned} y' &= \frac{f(x)}{g(y(x))} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{f(x)}{g(y)} \\ \int g(y)\mathrm{d}y &= \int f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Genauer fordern wir, dass f,g in rechteckigem Gebiet, wo $g \neq 0$, stetig sind und haben

$$\int_a^x g(y(t))y'(t)dt = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Setzen $s = y(t)$, $ds = y'(t)dt$, $y(a) = b$

$$\int_b^{y(x)} g(s)ds = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Der Satz über implizite Funktionen garantiert Eindeutigkeit und Existenz der Lösung $y(x)$ in Umgebung einer Anfangsbedingung $y(a) = b$.

Beispiel.

$$y' = -\frac{x}{y}$$
$$y(0) = 1$$

In diesem Fall ist also $f(x) = x$, $g(x) = -y$, $y \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

und wir berechnen

$$\int ydy = -\int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfolgt unmittelbar nach der Integration

$$\frac{1}{2} = 0 + c$$

sodass $c = \frac{1}{2}$ und

$$y^2 = 1 - x^2$$

Die eindeutige Lösung der Dgl lautet

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Zu beachten ist, dass $y = -\sqrt{1-x^2}$ nicht auch als Lösung der Dgl zugelassen ist, da die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ verletzt wäre.

1.1.2 Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Allgemein gilt für *lineare* DGL (siehe Übungen)

$$y_{\text{ges}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{spez}}(x)$$

y_{hom} ist allgemeine Lösung von $y' + f(x)y = 0$ und diese Dgl ist vom Typ getrennte Variable

$$y' + f(x)y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$

$$y_{hom}(x) = c\, e^{-\int_a^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}, \quad c \in \mathbb{R}$$

y_{spez} ist (irgendeine) spezielle Lösung der inhomogenen Dgl $y' + f(x)y = g(x)$ und wird durch „Variation der Konstanten“ bestimmt:

$$y_{spez}(x) = k(x) e^{-\int_a^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}$$

Mit der Bezeichnung $\bar{y}(x) = e^{-\int_a^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}$ schreiben wir $y_{spez}(x) = k(x)\bar{y}(x)$. Einsetzen in die inhomogene Dgl liefert (beachte, dass $\bar{y}(x)$ Lösung der homogenen Dgl ist)

$$k'\bar{y} + \underbrace{k\bar{y}' + fk\bar{y}}_{k\,(\bar{y}'+f\bar{y})=0} = g$$

$$k'\bar{y} = g$$

Die Dgl für $k(x)$ ist erneut vom Typ getrennte Variable

$$k(x) = \int_b^x d\tilde{x}\, \frac{g(\tilde{x})}{\bar{y}(\tilde{x})}$$

somit

$$y_{spez}(x) = \int_b^x d\tilde{x}\, \frac{g(\tilde{x})}{e^{-\int_a^{\tilde{x}} d\hat{x}\, f(\hat{x})}}\, e^{-\int_a^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ folgt schlussendlich (siehe Übungen) für $y = y_{hom} + y_{spez}$

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^x d\bar{x}\, f(\bar{x})} + \int_{x_0}^x d\tilde{x}\, \frac{g(\tilde{x})}{e^{-\int_{x_0}^{\tilde{x}} d\hat{x}\, f(\hat{x})}}\, e^{-\int_{x_0}^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}$$

Bemerkung: Glücklicherweise muss diese Formel nicht auswendig gelernt werden, lediglich die Lösungsmethode sollte angewendet werden können!

Beispiel.

$$\begin{aligned} y' + y &= 1 + x, \quad y(0) = 1 \\ y_{\text{hom}} &= c\mathrm{e}^{-x}, \quad c \in \mathbb{R} \\ y_{\text{spez}}(x) &= k(x)\mathrm{e}^{-x} \\ k'\mathrm{e}^{-x} - k\mathrm{e}^{-x} + k\mathrm{e}^{-x} &= 1 + x \\ k' &= (1+x)\mathrm{e}^{x} \\ k(x) &= \int (1+x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + c = x\mathrm{e}^{x} + c_1 \end{aligned}$$

wählen $c_1 = 0$, sodass

$$y_{\text{spez}}(x) = k(x)\mathrm{e}^{-x} = x$$

$$y_{\text{ges}} = c\mathrm{e}^{-x} + x$$

Eisetzen der Anfangsbedingung führt zu $y = \mathrm{e}^{-x} + x$.

1.1.3 Lösungstechniken für explizite DGL 1. Ordnung

1.1.3.1 Substitution

Gelegentlich kann DGL $y' = f(x, y)$ durch trickreiches Einführen neuer Variabler in eine DGL eines lösbaren Typs umgewandelt werden.

Beispiel.

$$y' = \frac{y - x}{y + x}, \quad y(1) = 0$$

umgeformt

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

legt dies die Einführung von $z = \frac{y}{x}$ nahe, bzw $y = z\,x$ sowie $y' = z'\,x + z$

$$z'\,x + z = \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$\int dz \frac{z+1}{1+z^2} = -\int dx \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{2} ln(1 + z^2) + arctg\, z = -ln \mid x \mid + c_1$$

Rückeinsetzen von $z = \frac{y}{x}$ und Umformungen führen zu

$$ln(x^2 + y^2) = c_2 - 2arctg\, \frac{y}{x}$$

Die Anfangsbedingung legt die Konstante $c_2 = 0$ fest, sodass

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e^{-arctg\, \frac{y}{x}}$$

Wir können die Lösung $y(x)$ explizit und eindeutig gewinnen. Eleganter lässt sich die Lösungskurve durch Verwenden von Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = arctg\, \frac{y}{x}$ als

$$r = e^{-\varphi}$$

schreiben.

1.1.3.2 Iteration

Umwandlung der DGL in Integralgleichung

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} dt\, y'(t) = \int\limits_{x_0}^{x} dt\, f(t, y(t))$$

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} dt\, f(t, y(t))$$

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dt\, f(t, y(t))$$

Iteratives Lösen der Integralgleichung:

0-te Näherung: $y_0(x) = y_0$
1-te Näherung: $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} dt\, f(t, y_0(t))$
2-te Näherung: $y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} dt\, f(t, y_1(t))$
...
Wenn Lippschitzbedingung erfüllt ist, dann konvergieren $y_n(x) \to y(x)$ gleichmäßig (o. Bew.).

Beispiel.

$$y' = -y + 1 + x, \quad y(0) = 1$$

bedeutet $f(x, y) = -y + 1 + x, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1$, sodass

$$y = 1 + \int\limits_{0}^{x} dt\, (-y(t) + 1 + t)$$

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} dt\, (-1 + 1 + t) = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \ldots$$

Vergleich mit der exakten Lösung $y(x) = e^{-x} + x$ nach Taylorreihenentwicklung der Exponentialfunktion zeigt Übereinstimmung

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \ldots$$

1.1.3.3 Potenzreihenansatz

Oft lässt sich Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ durch Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

finden. Aus

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$$

folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n = f(x, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$$

Die rechte Seite muss nun ebenfalls in Potenzreihe entwickelt werden, Koeffizientenvergleich führt zu Rekursionsformeln für die Koeffizienten a_n. Konvergenz der so gewonnenen Lösung ist zu überprüfen.

Beispiel.

$$y' = -y + 1 + x, \quad y(0) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 + x$$

Koeffizientenvergleich für x^k:

$k = 0 \qquad a_1 = -a_0 + 1$

$k = 1 \qquad 2a_2 = -a_1 + 1 = a_0$

$k \geq 2 \qquad (k+1)a_{k+1} = -a_k$

$$a_{k+1} = -\frac{a_k}{k+1} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} = \ldots = \frac{(-1)^{k-1} a_2}{(k+1)k(k-1)\ldots 3} = \frac{(-1)^{k-1} 2a_2}{(k+1)!} = \frac{(-1)^{k+1} 2a_2}{(k+1)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} a_0, \quad k \geq 2$$

bzw.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} a_0, \quad n \geq 3$$

Damit erhalten wir

$$y(x) = a_0 + (-a_0 + 1)x + \frac{a_0}{2} x^2 + a_0 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ führt zu $a_0 = 1$

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{2} x^2 + e^{-x} - (1 - x + \frac{1}{2} x^2) = e^{-x} + x$$

Dies stimmt mit der exakten Lösung $y(x) = e^{-x} + x$ überein.

Bemerkung. Eine näherungsweise Lösung lässt sich sehr rasch mit explizitem Auschreiben der ersten Terme der Reihenentwicklung gewinnen:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$
$$y(x)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ...$$

Wir verwenden sogleich die Anfangsbedingung $y(0) = 1$, sodass

$$y(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

und setzen in die DGL ein:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... = -1 - a_1 x - a_2 x^2 - ... + 1 + x$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ 2a_2 &= -a_1 + 1 \\ 3a_3 &= -a_2, \quad etc... \end{aligned}$$

Wie oben ergibt sich

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + ...$$

1.1.4 Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Ansatz:

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 : \ y_{\text{hom}} = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda : \ y_{\text{hom}} = c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x}$

Bemerkung. Wenn y_1, y_2 Lösungen der homogenen linearen DGL 2. Ordnung sind, so ist $c_1 y_1 + c_2 y_2$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (oder auch für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$) eine Lösung der homogenen linearen DGL 2. Ordnung

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' = c_1(-a_1 y_1' - a_0 y_1) + c_2(-a_1 y_2' - a_0 y_2) = -a_1(c_1 y_1 + c_2 y_2)' - a_0(c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

Wir erkennen somit, dass die Lösungen der homogenen linearen DGL 2. Ordnung einen Vektorraum bilden!

Bemerkung. Wenn $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ gilt für $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ dass $y_1^* = y_2$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} y_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_1^*) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ \operatorname{Im} y_1 &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1 - y_1^*) = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Mit der Eulerschen Formel (wird in ein paar Wochen ausführlich besprochen)

$$e^{i\beta x} = cos\,\beta x + i\,sin\,\beta x$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} &= \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x \\ \operatorname{Im} \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} &= \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

Für die homogene Lösung können wir somit ebenso gut schreiben

$$y_{\text{hom}} = \mathrm{e}^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

Definition (lineare Unabhängigkeit)**.** 2 Lösungen y_1, y_2 einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung heißen linear unabhängig (oder Hauptsystem), wenn aus

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

folgt, dass gilt

$$c_1 = c_2 = 0$$

Definition (lineare Abhängigkeit)**.** 2 Lösungen y_1, y_2 einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung heißen linear abhängig, wenn $\exists\,(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ sodass

$$c y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

Wir geben (ohne Beweis) ein Kriterium für die lineare Unabhängigkeit zweier Lösungen einer homogenen linearen DGL: 2 Lösungen y_1, y_2 sind linear unabhängig, wenn $\forall x$ die Wronski-Determinante $W(x)$ NICHT verschwindet

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$$

Beispiel. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \mathrm{e}^{\lambda_2 x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0\,\forall x$$

1.1.5 Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Analog zur linearen DGL 1. Ordnung gewinnen wir die Gesamtlösung mittels (siehe Übungen)

$$y_{\text{ges}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{spez}}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_{\text{hom}} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ kennen wir schon. Eine spezielle Lösung y_{spez} bestimmen wir mittels einer verallgemeinerten Methode der Variation der Konstanten

$$y_{\text{spez}} = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

Man kann durch Einsetzen in die inhomogene DGL nicht beide c_1, c_2 festlegen, daher ist eine extra Bedingung notwendig. Jede spezielle Lösung ist wählbar und somit jeder *erfolgreiche* Ansatz erlaubt. Tatsächlich führt die Bedingung

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

zu der einfachen Formel

$$y_{\text{spez}}(x) = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} \mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} \mathrm{d}x$$

Beweis.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

$$y'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

Einsetzen in die inhomogene Dgl. führt nach Vereinfachung mehrerer Terme zu

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f$$

Gemeinsam mit der Bedingung

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

stellt dies ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten c_1' und c_2' dar. Die Lösung lautet

$$c_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \qquad c_2' = \frac{y_1 f}{W}$$

sodass

$$c_1 = -\int \frac{y_2 f}{W} dx, \qquad c_2 = \int \frac{y_1 f}{W} dx, \qquad y_{spez} = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} \mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} \mathrm{d}x$$

Die Gesamtlösung der inhomogenen linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten lautet hiermit

$$y(x) = k_1\, y_1(x) + k_2\, y_2(x) - y_1(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_2(x')\, f(x')}{W(x')} \mathrm{d}x' + y_2(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_1(x')\, f(x')}{W(x')} \mathrm{d}x'$$

$\square$

Beispiel. $y'' + y = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1 \qquad \Rightarrow f(x) = 1$

$$\lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$$

$$y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$y_{\text{spez}} = -\cos x \int \sin x \,\mathrm{d}x + \sin x \int \cos x \,\mathrm{d}x = 1$$

$$y_{\text{ges}} = k_1 \cos x + k_2 \sin x + 1$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ergibt $k_1 = 1$, $k_2 = -1$.

1.1.6 Ansatz für spezielle Lösung der inhomogenen lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hier soll ein eleganter rascher Ansatz für das Auffinden einer speziellen Lösung der inhomogenen linearen Dgl. 2. Ordnung vorgestellt werden: Sei in der Dgl

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

der inhomogene Term von der Form $f(x) = f_r(x) e^{\alpha x} cos\beta x$, wo $f_r(x)$ ein Polynom r-ten Grades sowie $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ ist. Beachte, dass $k = 0, 1, 2$ als mögliche Werte auftreten können. Dann lautet der Ansatz für eine spezielle Lösung

$$y(x) = g_{r+k}(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

wo $g_{r+k}(x)$ ein Polynom $r + k$ ten Grades ist. Dieses Poynom kann mittels Koeffizientenvergeleichs durch Einsetzen in die KOMPLEX ERWEITERTE Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_r(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

ermittelt werden. Der REALTEIL von $y(x)$ liefert die spezielle Lösung

$$y_s(x) = Re\, y(x)$$

Ist andererseits der inhomogene Term von der Form $f(x) = f_r(x) e^{\alpha x} sin\beta x$, wo erneut $f_r(x)$ ein Polynom r-ten Grades sowie $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ sind und $k = 0, 1, 2$ als mögliche Werte auftreten, dann lautet der Ansatz für eine spezielle Lösung gleich wie vorher

$$y(x) = g_{r+k}(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

wo $g_{r+k}(x)$ ein Polynom $r + k$ ten Grades ist. Dieses Poynom wird mittels Koeffizientenvergeleichs gleich wie vorher durch Einsetzen in die KOMPLEX ERWEITERTE Differentialgleichung bestimmt

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_r(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

jedoch ist es nun der IMAGINÄRTEIL von $y(x)$, der die spezielle Lösung liefert

$$y_s(x) = Im\, y(x)$$

Beispiel. $y'' + \omega_0^2 y = cos\omega x, \qquad \omega_0 \neq \omega \qquad \Longrightarrow r = 0, \alpha = 0, \beta = \omega, \lambda_0 = \alpha + i\beta = i\omega$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_0$$

Da $\lambda \neq \lambda_0$ gilt $k = 0$, somit $r + k = 0$ und g_0 ist eine Konstante $g_0(x) = c$. Der Ansatz lautet $y = ce^{i\omega x}$ und wird in $y'' + \omega_0^2 y = e^{i\omega x}$ eingesetzt.

$$ci^2\omega^2 e^{i\omega x} + \omega_0^2 c e^{i\omega x} = e^{i\omega x}$$

Daraus bestimmen wir $c = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},\ y = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega x},\ y_s = Re\, y = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} cos\omega x$

1.1.7 Allgemeine lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

Wenn f, g, h stetig in Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so existiert eine eindeutige Lösung mit $y(x_0) = \eta_0$, $y'(x_0) = \eta_1$, wo $x_0 \in I$.

1.1.7.1 Allgemeine lineare homogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

Es existieren immer 2 linear unabhängige Lösungen (ohne Beweis), aber es gibt *kein allgemeines* Verfahren zu deren Bestimmung. Manchmal ist eine Lösung $y_1(x)$ bekannt (z.B. durch Erraten), dann kann man dazu eine l.u. Lösung $y_2(x)$ bestimmen: Betrachten zunächst W, leiten ab und setzen für y'' die DGL ein:

$$\begin{aligned}
W &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\
W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \\
&= y_1(-f y_2' - g y_2) - y_2(-f y_1' - g y_1) = -f(y_1 y_2' - y_2 y_1') \\
&= -fW \\
\int \frac{\mathrm{d}W}{W} &= -\int f \mathrm{d}x \\
\ln|W| &= -\int f \mathrm{d}x \\
W &= \mathrm{e}^{-\int f \mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Trick:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2} \\
\frac{y_2}{y_1} &= \int \frac{W}{y_1^2} \mathrm{d}x \\
y_2 &= y_1 \int \frac{W}{y_1^2} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Beispiel.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0,\ |x| < 1$$

Durch Erraten: $y_1(x) = x$

Probe:

$$\begin{aligned}
y_1' &= 1 \\
y_1'' &= 0 \\
-\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2} x &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{2x}{1-x^2} \\
W(x) &= \mathrm{e}^{-\int \frac{-2x}{1-x^2}\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= x\int \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \dots \\
&= x(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}) \\
&= -1 + \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}
\end{aligned}
$$

1.1.7.2 Allgemeine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

$$y_{\text{ges}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{spez}}$$

Die homogene Lösung wird wie zuvor bestimmt, die spezielle Lösung wieder mittels Variation der Konstanten

$$y_{\text{ges}} = k_1 y_1 + k_2 y_2 - y_1\int \frac{y_2 h}{W}\mathrm{d}x + y_2\int \frac{y_1 h}{W}\mathrm{d}x$$

1.1.8 Typ $y''(x) = F(y)$

Trick: Es gilt allgemein $y'y'' = \frac{1}{2}\frac{d(y'^2)}{dx}$; wir multiplizieren die Dgl mit y'

$$y'y'' = y'F(y)$$

sodass

$$\frac{1}{2}\frac{d(y'^2)}{dx} = \frac{dy}{dx}F(y) \tag{1.3}$$

Salopp erhalten wir daraus sofort

$$\frac{1}{2}\int d(y'^2) = \int dyF(y)$$

$$\frac{1}{2}y'^2(x) = \int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} dsF(s) + C$$

Genauer folgt dieses Ergebnis aus (1.3) gemäß

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\left(y'(\xi)^2\right)}{d\xi}d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} F(y(\xi))y'(\xi)d\xi$$

und der Substitution $s = y(\xi)$, $ds = y'(\xi)d\xi$.

Wenn wir statt der Variablen $y(x)$ die Variablen $x(t)$ betrachten, lauten die obigen Formeln auf analoge Weise

$$\ddot{x} = F(x)$$

sowie

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) = \int\limits_{x(t_0)}^{x(t)} d\xi F(\xi) + C$$

Beispiel. Wichtiges Beispiel ist das Newtonsche Kraftgesetz (hier in d=1 räumlichen Dimensionen betrachtet)

$$m\ddot{x} = F(x)$$

m bezeichnet die Masse eines Teilchen, $F(x)$ bedeutet die Kraft, die auf dieses Teilchen wirkt. Sei $t_0 = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ dann haben wir

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \int\limits_{x_0}^{x(t)} d\xi F(\xi) + C$$

Wir definieren

- $K(\dot{x}) := \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ... kinetische Energie
- $V(x) := -\int_{x_0}^{x} d\xi F(\xi)$ ... potentielle Energie

Damit lautet unser obiges Ergebnis $K + V = C$, was den Namen „Energieerhaltungssatz“ trägt (oft wird suggestiv der Buchstabe E anstelle von C verwendet: $K + V = E$). Somit

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -V(x) + C$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(C - V(x))}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(C - V(\xi))}} = t - t_0$$

Für unser Beispiel wollen wir nun konkret $F(x) = -\omega^2 x$, bzw. $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, sowie $m = 1$, $x_0 = 0$, $v_0 = \omega$ betrachten.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Der Energierhaltungssatz lautet

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2(t) = C$$

Ausgewertet zur Zeit $t_0 = 0$ berechnen wir

$$C = \frac{1}{2}\omega^2$$

sodass nur noch das Integral

$$\frac{1}{\omega}\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = t$$

zu bilden ist. Wir finden sofort

$$\frac{1}{\omega} arcsin\, x = t$$

$$x(t) = sin\, \omega t$$

Kapitel 2

Funktionentheorie

Differential- und Integralrechnung mit komplexwertigen Funktionen.

2.1 Grundbegriffe komplexer Zahlen

Historisches Beispiel *Gerolamo Cardano* (1545):

> „Sieh von den damit verbundenen Geistesqualen ab, und setze die angenommene Antwort in die Gleichung ein ...“

$$x(10-x) = 40 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{-15} \text{ mit } (\sqrt{-15})^2 := -15$$

Probe: $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$

$$\begin{aligned} x^3 = 15x + 4 \Rightarrow x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Erst nach **300** Jahren fertiger Formalismus:

Definition. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ besteht aus Elementen (x, y) des $\mathbb{R}^2$ mit

- Addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Multiplikation mit reeller Zahl $a \in \mathbb{R} : a(x, y) = (ax, ay)$
- Multiplikation $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$

Satz. $\mathbb{C}$ *bildet einen* kommutativen *Körper*

(ohne Beweis, kann sofort nachgeprüft werden)

Notation:

reelle Zahlen Punkte auf x-Achse. z.B.: $1 = (1, 0)$

imaginäre Zahlen Punkte auf der y-Achse. Definieren $\mathrm{i} := (0, 1)$

$\Rightarrow (x, y) = x + \mathrm{i} \cdot y$

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}^2 &= ? \\
\mathrm{i}^2 &= (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0) \\
&= -1
\end{aligned}$$

somit lautet eine äquivalente Definition

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y | x, y \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1\}$$

- $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$
- $az = ax + \mathrm{i}ay$

- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2)$

Bemerkung. aus $a + \mathrm{i}b = c + id$ folgt $a = c$ **und** $b = d$. (Wegen der Definition von Gleichheit im $\mathbb{R}^2$)

Definition. Komplexe Konjugation

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad z^* = x - \mathrm{i}y$$

Es gilt

- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

Beweis durch einsetzen!

Definition. Norm ($\equiv$ Betrag)

$$|z| := \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Beweis: $\sqrt{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \sqrt{x^2 - \mathrm{i}^2y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Es gilt

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

Beweis: $\sqrt{z_1z_2(z_1z_2)^*} = \sqrt{z_1z_1^*z_2z_2^*} = \sqrt{z_1z_1^*}\sqrt{z_2z_2^*}$

Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
(ohne Beweis, wie im $\mathbb{R}^2$)

Definition. *Reel- und Imaginärteil*

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \mathrm{Re}\, z = x \qquad \mathrm{Im}\, z = y$$

es gilt

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2\mathrm{i}}$$

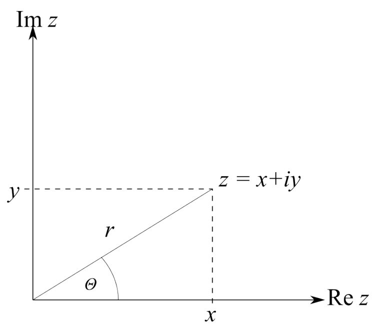
Beispiel.

$$\mathrm{Im}\frac{z+2}{z-1} = ?$$

Trick: Nenner mit komplexer Konjugation erweitern!

$$\begin{aligned}
\frac{z+2}{z-1} &= \frac{x+2+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y} \\
&= \frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y} \cdot \frac{(x-1)-\mathrm{i}y}{(x-1)-\mathrm{i}y} \\
&= \frac{(x+2)(x-1)+y^2+\mathrm{i}\overbrace{[y(x-1)-y(x+2)]}^{=-3y}}{(x-1)^2+y^2} \\
\mathrm{Im}\frac{z+2}{z-1} &= \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}
\end{aligned}$$

2.1.1 Polardarstellung komplexer Zahlen



Es ist $\tan\Theta = \frac{y}{x}$ und $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$z = x + \mathrm{i}y = r\cos\Theta + \mathrm{i}r\sin\Theta = r(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta)$$

r heißt Betrag von z, Θ heißt Argument von z, $\Theta = \arg z$.

Bemerkung. $\arg z$ ist keine eindeutige Funktion: $\Theta + 2\pi n$, mit $n \in \mathbb{Z}$, gehört zu gleichem z, man sagt $\arg z$ hat mehrere *Zweige*. Bei fixem z ist $\arg z$ eine unendlich fach mehrdeutige Funktion.

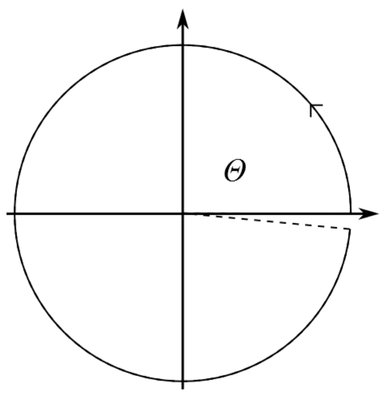
Beispiel. $z = \mathrm{i}$

$$\arg \mathrm{i} = \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{5\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + 4\pi = -\frac{9\pi}{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

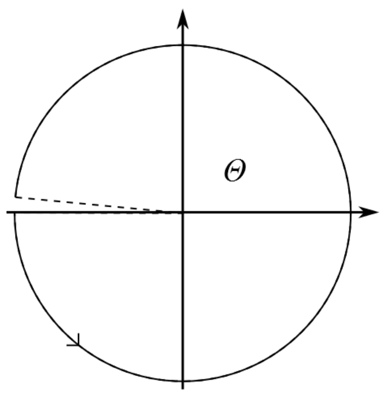
Wahl eines Zweiges von $arg\, z$:
Man kann die mehrdeutige Funktion $\arg z$ durch Wahl eines ihrer Zweige eindeutig machen. Das bedeutet Vorgabe von $y_0 \in \mathbb{R} : y_0 \leq \Theta < y_0 + 2\pi$. Wir betrachten 2 Beispiele:

- $y_0 = 0$, dh. $0 \leq \Theta < 2\pi$
- $y_0 = -\pi$ dh. $-\pi \leq \Theta < \pi$, (diese Wahl heißt *Hauptzweig* der Argumentfunktion).

Zweig mit $y_0 = 0$ also $0 \leq \Theta < 2\pi$:



Hauptzweig, $y_0 = -\pi$ also $-\pi \leq \Theta < \pi$:



2.1.2 Geometrische Deutung von Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$

Addition: Vektoraddition
Multiplikation komplexer Zahlen: Drehstreckung

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 \left[(\cos\Theta_1 \cos\Theta_2 - \sin\Theta_1 \sin\Theta_2) + \mathrm{i}(\cos\Theta_1 \sin\Theta_2 + \cos\Theta_2 \sin\Theta_1)\right] \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\Theta_1 + \Theta_2) + \mathrm{i}\sin(\Theta_1 + \Theta_2)\right] \end{aligned}$$

Daraus folgt: Beträge multiplizieren sich, Winkel werden addiert (modulo 2π).

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

- $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$

Beispiel. Betrachten $z_1 = -1$, $z_2 = -\mathrm{i}$ und wählen zunächst den Zweig mit $y_0 = 0$ also $0 \leq \Theta < 2\pi$:

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 \\ |z_1| &= 1 \\ \arg z_1 &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -i \\ |z_2| &= 1 \\ \arg z_2 &= 3\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= i \\ |z_1 z_2| &= 1 \\ \arg z_1 z_2 &= \frac{\pi}{2} \\ \arg z_1 + \arg z_2 &= \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2} \\ (\arg z_1 + \arg z_2) \pmod{2\pi} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Für den Hauptzweig von $arg\, z$ gilt $\arg z_1 = -\pi$ und $\arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$ sowie $\arg z_1 z_2 = \frac{\pi}{2}$. Hier ist nun $\arg z_1 + \arg z_2 = -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} = -2\pi + \frac{\pi}{2}$

Formel von de Moivre: Sei $n \in \mathbb{N}$ und z in Polardarstellung gegeben $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, dann gilt:

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$$

Beweis durch vollständige Induktion.

Wurzelziehen Sei $w \in \mathbb{C}$ in Polardarstellung $w = r(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta)$ gegeben. Gesucht ist $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = w$, dh $z = \sqrt[n]{w}$.
Ansatz:

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \quad \text{, daher} \\ z^n &= \rho^n(\cos n\psi + \mathrm{i}\sin n\psi) \end{aligned}$$

Vergleiche:

$$\rho^n = r \qquad n\psi = \Theta + 2\pi k$$

damit

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)\right] \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Bemerkung. Für $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ sind die z_k verschieden!

Bemerkung. $z \to \sqrt[n]{z}$ ist neuerliches Beispiel für eine mehrdeutige Funktion. Wir können auch diese Funktion eindeutig machen durch die Wahl eines *Zweiges* von $\sqrt[n]{z}$ (siehe später) oder die Verwendung *Riemannscher Blätter* (diese werden jedoch in dieser Vorlesung nicht besprochen).

Beispiel. Sei $w = 1$, $|w| = 1$, $\arg w = 0$. Sei $n = 3$, $z^3 = 1$, gesucht $z = \sqrt[3]{1}$.

$$z_k = \cos\frac{k}{3}2\pi + \mathrm{i}\sin\frac{k}{3}2\pi$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \cos\frac{4\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Beispiel. Sei $w = -1$, $|w| = 1$, $\arg w = \pi$.Sei $n = 2$, $z^2 = -1$, gesucht $z = \sqrt{-1}$.

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k}{2}2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k}{2}2\pi\right)$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i} \\ z_1 &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = -\mathrm{i} \end{aligned}$$

2.2 Wichtige Funktionen

2.2.1 Exponentialfunktion

Definition. Exponentialfunktion

Es sei

$$
\begin{aligned}
z &= x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \quad \text{dann} \\
e^z &:= e^x \cdot (\cos y + \mathrm{i} \sin y)
\end{aligned}
$$

Eigenschaften:

1. $e^{z+w} = e^z e^w, \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$
2. $|e^{x+\mathrm{i}y}| = e^x$
3. $e^z \neq 0$

Beweis. (1)

Sei $z = x + \mathrm{i}y$, $w = s + \mathrm{i}t$.

$$
\begin{aligned}
e^{z+w} &= e^{x+s+\mathrm{i}(y+t)} \\
&= e^{x+s} \left[\cos(y+t) + \mathrm{i}\sin(y+t)\right] \\
&= e^x e^s \left[\cos y \cos t - \sin y \sin t + \mathrm{i}(\cos y \sin t + \sin y \cos t)\right] \\
&= \left[e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\right]\left[e^s(\cos t + \mathrm{i}\sin t)\right] \\
&= e^z e^w
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
|e^{x+\mathrm{i}y}| &= |e^x e^{\mathrm{i}y}| = |e^x||e^{\mathrm{i}y}| \\
&= e^x |\cos y + \mathrm{i}\sin y| \qquad (\text{da } e^x > 0) \\
&= e^x \qquad (\text{da } \cos y^2 + \sin y^2 = 1)
\end{aligned}
$$

(3)

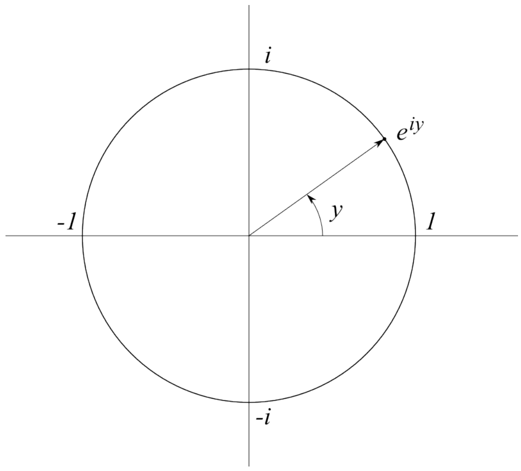
$$e^z \neq 0 \text{ da } |e^z| = e^x \neq 0$$

$\square$

Bemerkung. Spezialfall $x = 0$

$$e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i} \sin y$$

Komplexe Zahl $e^{\mathrm{i}y}$ ist ein Punkt am Einheitskreis mit dem Argument y, periodisch unter $y \to y+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.



$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \\ e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} &= \mathrm{i} \\ e^{\pi\mathrm{i}} &= -1 \\ e^{3\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} &= -\mathrm{i} \\ e^{2\pi\mathrm{i}} &= 1 \end{aligned}$$

Bemerkung. Polardarstellung wird nun auch

$$z = r(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta) = re^{\mathrm{i}\Theta} = |z|e^{\mathrm{i}\Theta} = |z|e^{\mathrm{i}\arg z}$$

2.2.2 Trigonometrische Funktionen

Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ $\quad \cos z := \frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2} \qquad \sin z := \frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$

Eigenschaften:

1. $\sin z^2 + \cos z^2 = 1$
2. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
3. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

Beweis. (1)

$$1 = e^{\mathrm{i}z}e^{-\mathrm{i}z} = (\cos z + \mathrm{i}\sin z)(\cos z - \mathrm{i}\sin z) = \cos z^2 + \sin z^2$$

□

Bemerkung. Im Allgemeinen gilt **nicht**, dass $|\cos z| \leq 1$ ist. Wähle z.B. $z = \mathrm{i}x$ mit $x \in \mathbb{R}$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \left|\frac{e^{-x} + e^{x}}{2}\right| \\ &= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x \geq 1 \end{aligned}$$

Definition. Hyperbelfunktionen
Für $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \cosh z &:= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \\ \sinh z &:= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

Eigenschaften z.B.: $\cosh z^2 - \sinh z^2 = 1$

2.2.3 Logarithmus

Betrachten

$$\begin{aligned} z &= |z|e^{\mathrm{i}\arg z} = e^{\ln|z|}e^{\mathrm{i}\arg z} \\ &= e^{\ln|z| + \mathrm{i}\arg z} \\ &=: e^{\ln z} \end{aligned}$$

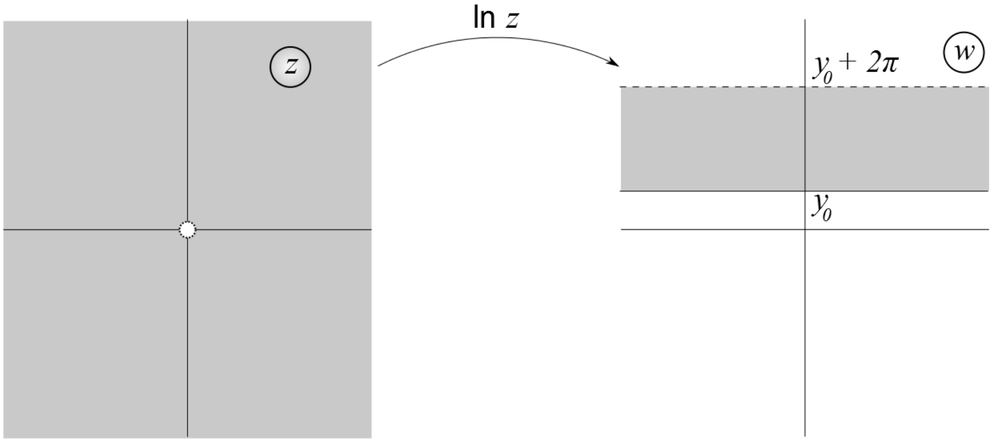
Wir definieren $\ln z := \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$, erkennen, dass dies wegen der Mehrdeutigkeit von $\arg z$ eine mehrdeutige Funktion ist.

Wir definieren nun einen *Zweig* von $\ln z$ mittels der Wahl eines *Zweiges* von $\arg z$, damit wird $\ln z$ eine eindeutige Funktion! Insbesondere wird $\ln z$ eine eindeutige Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, siehe anschließend.

Definition. Zweig des Logarithmus

$$\ln z : \{z | z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \to \{w | w = u + \mathrm{i}v;\ u, v \in \mathbb{R},\ y_0 \leq v < y_0 + 2\pi\}$$

$$z \to w = \ln z := \ln|z| + \mathrm{i}\arg z, \quad \arg z \in [y_0, y_0 + 2\pi)$$



Beispiel. $y_0 = 0$

$$\begin{aligned}\ln(-1) &= \ln 1 + \mathrm{i}\pi = \mathrm{i}\pi \\ \ln(-\mathrm{i}) &= \ln 1 + \mathrm{i}\frac{3\pi}{2} = \mathrm{i}\frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

$y = -\pi$

$$\begin{aligned}\ln(-1) &= \ln 1 - \mathrm{i}\pi = -\mathrm{i}\pi \\ \ln(-\mathrm{i}) &= \ln 1 - \frac{\pi}{2} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Behauptung. *Zweig des Logarithmus ist in folgendem Sinn eine Umkehrfunktion von e^z:*

1. *Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $e^{\ln z} = z$*
2. *Für $z = x + \mathrm{i}y$ wo $y \in [y_0, y_0 + 2\pi)$ gilt: $\ln e^z = z$*

Beweis. (1)

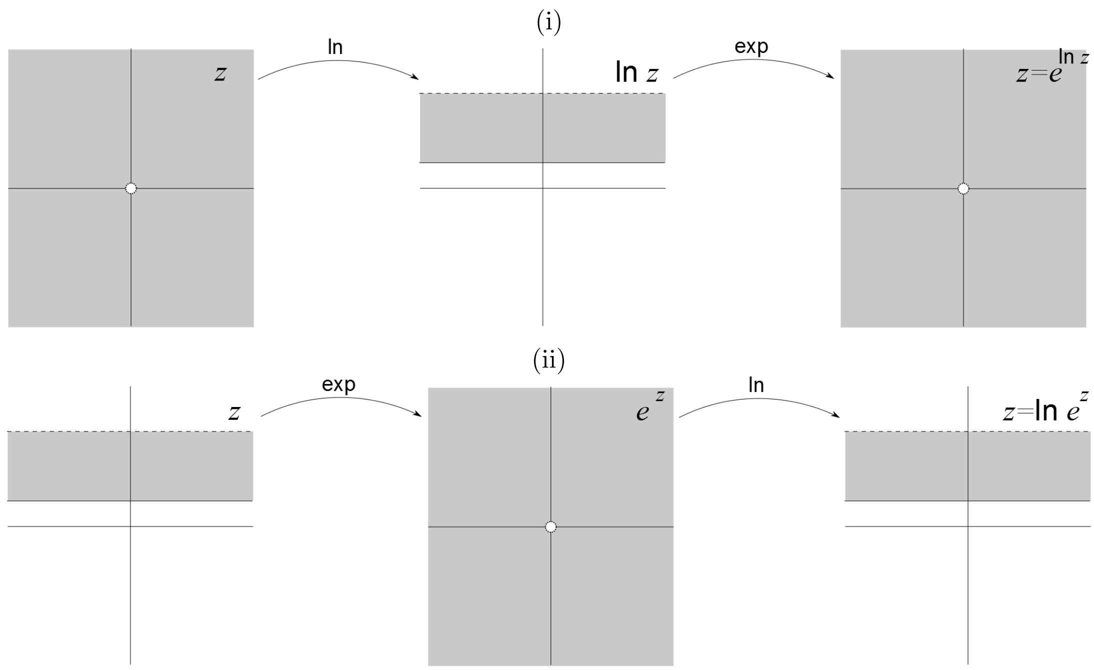
$$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + \mathrm{i}\arg z} = |z|e^{\mathrm{i}\arg z} = z$$

(2)

$$\begin{aligned}\ln e^z &= \underbrace{\ln|e^z|}_{\ln e^x} + \mathrm{i}\arg e^z \\ &= \underbrace{lne^x}_{x} + \mathrm{i}\underbrace{\arg e^x e^{\mathrm{i}y}}_{y} \\ &= x + \mathrm{i}y\end{aligned}$$

weil $\arg e^x e^{\mathrm{i}y} = \arg e^{\mathrm{i}y} = y$, wobei $y \in [y_0, y_0 + 2\pi)$ laut Wahl des Zweigens von $\arg z$. $\square$

Graphisch:



Behauptung. *Wenn* $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *gilt für Zweig des* ln

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \qquad \mod 2\pi \mathrm{i}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \ln z_1 z_2 &= \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i} \underbrace{\arg z_1 z_2}_{\in[y_0, y_0+2\pi)} \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i} \underbrace{\arg z_1 z_2}_{\in[y_0, y_0+2\pi)} \end{aligned}$$

von früher wissen wir schon:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad \mod 2\pi$$

Mit anderen Worten: $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + n \cdot 2\pi \mathrm{i}$, wo $n \in \mathbb{Z}$ so gewählt ist, dass $\operatorname{Im}(\ln(z_1 z_2)) \in [y_0, y_0 + 2\pi)$ $\square$

Beispiel.

$$\ln((-1)(-1)) = \ln(-1) + \ln(-1) + ??$$

Betrachten z.B. $y_0 = 0$ und wissen schon, dass $\ln(-1) = \mathrm{i}\pi$.

$$\Rightarrow \ln((-1)(-1)) = \ln 1 = 0 = \underbrace{\ln(-1)}_{\mathrm{i}\pi} + \underbrace{\ln(-1)}_{\mathrm{i}\pi} - 2\mathrm{i}\pi$$

2.2.4 Komplexe Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und für einen Zweig des Logarithmus existiert eine eindeutige Definition von a^b.

Definition.

$$a^b := e^{b \cdot \ln a}$$

Beispiel. $(y_0 = 0)$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{\mathrm{i}} &= e^{\mathrm{i} \ln \mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \\ 2^{\mathrm{i}} &= e^{\mathrm{i} \ln 2} = \cos \ln 2 + \mathrm{i} \sin \ln 2 \end{aligned}$$

Beispiel. *Zweig* der n-ten Wurzel $\sqrt[n]{z}$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln z} = e^{\frac{1}{n}(\ln r + \mathrm{i}\Theta)} = \sqrt[n]{r} e^{\mathrm{i}\frac{\Theta}{n}}$$

wo $\Theta \in [y_0, y_0 + 2\pi)$

Beispiel. $y_0 = \pi$

$$1 = e^{\mathrm{i}2\pi} \Rightarrow \sqrt{1} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{2}} = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

Bemerkung. Im Allgemeinen ist $(ab)^c \neq a^c b^c$ da

$$\begin{aligned} (ab)^c &= e^{c(\ln(ab))} \\ &= e^{c(\ln a + \ln b + 2\pi\mathrm{i})} \\ &= a^c \cdot b^c \cdot e^{c2\pi\mathrm{i}n} \end{aligned}$$

2.3 Komplexe Differentiation

Definition. Sei $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$f(z)$ heißt *differenzierbar* in $z_0 \in G$, wenn für $h \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

eindeutig existiert.

$f(z)$ heißt *analytisch* ($\equiv$ *regulär*, $\equiv$ *holomorph*) in G, wenn $f(z) \quad \forall z \in G$ differenzierbar ist.

Bemerkung. Die Definition der komplexen Differenzierbarkeit ist wesentlich reichhaltiger als die analoge Definition im $\mathbb{R}^2$, wegen der speziellen Natur der Division komplexer Zahlen. Zur Erinnerung:

Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$: $\vec{f} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt *differenzierbar* in $\vec{x_0} \in G$ wenn eine 2x2 Matrix

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{x_0}}$$

existiert, sodass

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{|\vec{f}(\vec{x_0} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x_0}) - A\vec{h}|}{|\vec{h}|} = 0$$

Eine Division durch $\vec{h}$ ist nicht möglich, nur $|\vec{h}|$ erlaubt. Es muss Grenzwert $|\vec{h}| \to 0$ als Ganzes betrachtet werden!

Für $\mathbb{C}$: Eine Division durch eine komplexe Zahl h ist sehr wohl möglich. Ein beliebiges Annähern von $h \to 0$ trägt unterschiedlich bei! Daraus folgt, dass die Eindeutigkeit des Grenzwertes in $\mathbb{C}$ im Vergleich zum $\mathbb{R}^2$ einschränkender ist. Dies zeichnet differenzierbare Funktionen besonders aus, zum Beispiel ist jede analytische Funktion unendlich oft differenzierbar (siehe später).

Satz. *Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. Wenn $f(z)$ in z_0 differenzierbar ist, so gelten in z_0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ *und*

$$f'(z_0) = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{x_0,y_0} = \left.\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{x_0,y_0}$$

Beweis. $z_0 := x_0 + \mathrm{i}y_0$, $h := s + \mathrm{i}t$, $f := u + \mathrm{i}v$. Wegen der Eindeutigkeit der Differentiation können wir zwei Spezialfälle gleichsetzen:

$$\lim_{s \to 0, t=0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{t \to 0, s=0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

linke Seite:

Hier ist h reel und $z_0 + h = x_0 + \mathrm{i}y_0 + s = (x_0 + s) + iy_0$

$$\begin{aligned} \lim_{s \to 0} \tfrac{u(x_0+s,y_0)+\mathrm{i}v(x_0+s,y_0)-u(x_0,y_0)-\mathrm{i}v(x_0,y_0)}{s} &= \\ \lim_{s \to 0} \tfrac{u(x_0+s,y_0)-u(x_0,y_0)}{s} + i \lim_{s \to 0} \tfrac{(v(x_0+s,y_0)-v(x_0,y_0))}{s} &= \left.\left(\tfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\tfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{x_0,y_0} \end{aligned}$$

rechte Seite:

Nun ist h imaginär und $z_0 + h = x_0 + \mathrm{i}y_0 + it = x_0 + i(y_0 + t)$

$$
\begin{array}{rcl}
\lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t)+\mathrm{i}v(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)-\mathrm{i}v(x_0,y_0)}{it} & = & \\
-i \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t)+\mathrm{i}v(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)-\mathrm{i}v(x_0,y_0)}{t} & = & \\
-i \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t} \underbrace{-ii}_{+1} \lim_{t\to 0} \frac{v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)}{t} & = & \left(-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{x_0,y_0} \\
& = & \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x_0,y_0}
\end{array}
$$

also gilt in z_0 dass $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

□

Satz. *Wenn $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in z_0* ***stetige*** *partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ besitzt (wo $f = u + \mathrm{i}v$)* ***sowie*** *die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, so ist f in z_0 differenzierbar. Es gilt dann*

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{x_0,y_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x_0,y_0}$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen gilt für s, t infinitesimal klein:

$$
\begin{array}{rcl}
u(x+s, y+t) - u(x,y) & = & \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + ... \\
v(x+s, y+t) - v(x,y) & = & \frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t + ...
\end{array}
$$

Sei $z = x + \mathrm{i}y$, $h = s + \mathrm{i}t$, $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. Dann ist

$$
\begin{array}{rcl}
f(z+h) - f(z) & = & u(x+s,y+t) - u(x,y) + \mathrm{i}(v(x+s,y+t) - v(x,y)) \\
& = & \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + i(\frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t) + ... \\
& = & \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot s + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\text{mit CR-DGL: -}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)} \cdot t + ... \\
& = & \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (s + \mathrm{i}t) + ... \\
& = & \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot h + ...
\end{array}
$$

Somit ist

$$f' = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

□

Beispiel. $f(z) = z^2$ ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$

Beweis. $f = (x + \mathrm{i}y)(x + \mathrm{i}y) = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i \underbrace{2xy}_{v}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$
$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$

Die partiellen Ableitungen existieren und sind stetig in ganz $\mathbb{C}$, sie erfüllen in ganz $\mathbb{C}$ die CR-Dgl, somit ist $f(z) = z^2$ analytisch auf ganz $\mathbb{C}$
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + \mathrm{i}2y = 2z$ □

Beispiel. $f = z^*$ ist nicht analytisch. $f = x - \mathrm{i}y \Rightarrow u = x, v = -y$ Damit folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Die CR-Dgl werden verletzt.

Satz. *Seien f, g analytisch in $G \subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

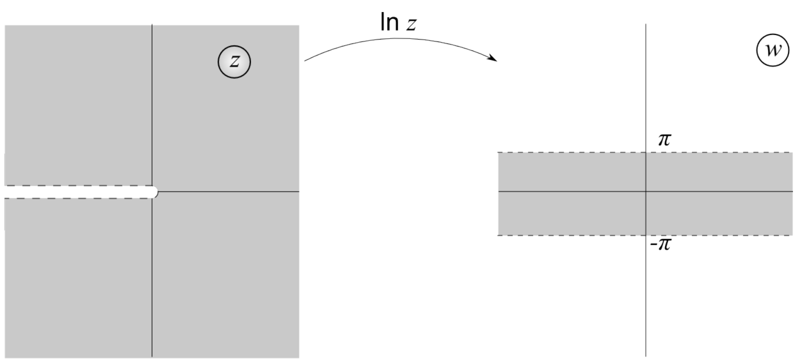
1. $(af + bg)' = af' + bg'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. *Wenn* $g(z) \neq 0\, \forall z \in G$ *dann* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. *Ist f analytisch in $A \subset \mathbb{C}$, und g analytisch in $B \subset \mathbb{C}$ mit $f(A) \subset B$, dann ist $g(f(z))' = g'(f(z))f'(z)$ (Kettenregel)*

(ohne Beweis, da analog zum Beweis im Reellen)

Bemerkung. Die Definition des Zweiges des Logarithmus hat zwar das Problem der Mehrdeutigkeit behoben, dafür aber ein Problem mit **Unstetigkeit** eingehandelt!

Beispiel. Für die Wahl des Zweiges $y_0 = -\pi$ gibt es bei $z = -x \pm \mathrm{i}\epsilon$, $x > 0$, einen Sprung von $\ln z$ um $-2\pi\mathrm{i}$. $\Rightarrow$ weitere Einschränkung für die Wahl des Zweiges notwendig:

Definition. Hauptzweig des Logarithmus $\ln z : \underbrace{\mathbb{C} \setminus \{x + \mathrm{i}y | x \leq 0, y = 0\}}_{\mathbb{C} \text{ ohne negative reelle Achse}} \to \{w | w = u + \mathrm{i}v; u, v \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$



$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i} \cdot \arg z, \text{ wo} - \pi < \arg z < \pi$$

Es gilt: Der Hauptzweig des Logarithmus ist auf $\mathbb{C} \setminus \{x + \mathrm{i}y | x \leq 0, y = 0\}$ analytisch und

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

Beweis. Auf $\mathbb{C} \setminus \{x + \mathrm{i}y | x \leq 0, y = 0\}$ ist $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, $\Theta = \arctan \frac{y}{x}$ mit $-\pi < \Theta < \pi$ partiell stetig nach x, y differenzierbar.

$f = \ln z = \underbrace{\ln r}_{u} + \mathrm{i} \underbrace{\Theta}_{v}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{x}{r} = \frac{x}{r^2} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \arctan \frac{y}{x}}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{r^2} \\
-\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{r^2}
\end{aligned}$$

$$(\ln z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{r^2} - \mathrm{i}\frac{y}{r^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{r^2} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{1}{z}$$

□

Beispiel. $f(z) = z^b$ mit $b \in \mathbb{C}$ ist auf dem Definitionsbereich des Hauptzweiges des Logarithmus analytisch und $(z^b)' = b \cdot z^{b-1}$.

Beweis. $z^b = e^{b \ln z}$ ist analytisch, wo $\ln z$ analytisch ist (wegen Kettenregel).

$$\begin{aligned}
(z^b)' &= (e^{b \ln z})' = e^{b \ln z}(b \ln z)' \\
&= z^b \cdot \frac{b}{z} = b \cdot z^{b-1}
\end{aligned}$$

□

2.4 Komplexe Integration

2.4.1 Kurvenintegral

Sei f eine stetige Funktion $G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Sei $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine (stückweise stetig differenzierbare) Kurve in $G \subset \mathbb{C}$ mit Parameterdarstellung $z(t)$.

Definition. Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$$

Bemerkung. Diese Definition passt mit der Definition des reellen Kurvenintegrals zusammen:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f dz &= \int_\gamma (u+\mathrm{i}v)\cdot(dx+\mathrm{i}dy) \\
&= \underbrace{\int_\gamma (udx - vdy)}_{\text{reelles Kurvenintegral}} + i \underbrace{\int_\gamma (vdx + udy)}_{\text{reelles Kurvenintegral}} \\
&\overset{!}{=} \int_{t_0}^{t_1} (u\dot{x} - v\dot{y})dt + \mathrm{i}\int_{t_0}^{t_1}(v\dot{x}+u\dot{y})dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (u+\mathrm{i}v)(\dot{x}+\mathrm{i}\dot{y})dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} f\frac{dz}{dt}dt
\end{aligned}$$

Beispiel. $f(z) = z^*$
$\gamma : z(t) = t^2 + \mathrm{i}t$ mit $t \in [0,2]$

$\Rightarrow f(z(t)) = t^2 - \mathrm{i}t$
$\dot{z} = 2t + i$

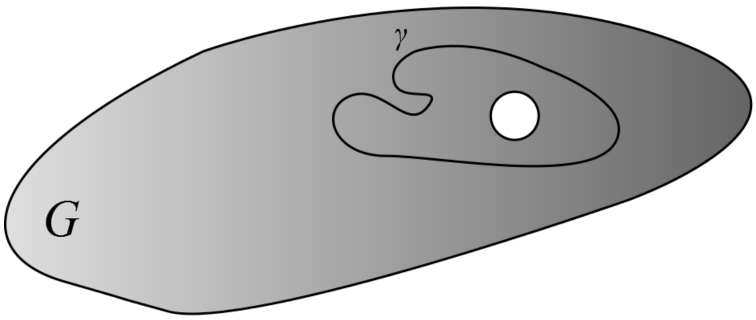
$\int_\gamma f dz = \int_0^2 (t^2 - \mathrm{i}t)(2t+\mathrm{i})dt = \int_0^2 (2t^3+t)dt - \mathrm{i}\int_0^2 t^2 dt = 10 - \frac{8}{3}\mathrm{i}$

Satz. *Sei $F(z)$ in $G \subset \mathbb{C}$ analytisch und sei $\gamma : [t_0,t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Kurve von z_0 nach z_1 sowie sei $\gamma \in G$.*
Dann gilt unabhängig von der Wahl des Weges γ

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Für geschlossene Kurven γ (dh. wenn $z_0 = z_1$) gilt

$$\oint_\gamma F'(z)dz = 0$$



Beweis. $F' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F' dz &= \text{analog zu vorher} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} - \overbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}^{\overset{!}{=}+\frac{\partial u}{\partial y}} \dot{y})dt + \mathrm{i}\int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{\overset{!}{=}\frac{\partial v}{\partial y}} \dot{y}) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \dot{u} dt + \mathrm{i}\int_{t_0}^{t_1} \dot{v} dt \\
&= u(t_1) - u(t_0) + \mathrm{i}v(t_1) - \mathrm{i}v(t_0) \\
&= F(z_1) - F(z_0)
\end{aligned}$$

Ist die Kurve geschlossen so ist $z_1 = z_0 \Rightarrow \oint_\gamma F'(z)dz = 0$ $\square$

Beispiel. γ: Ellipse $|z-3| + |z+3| = 10$ mit $z_0 = 5$ und $z_1 = 4\mathrm{i}$

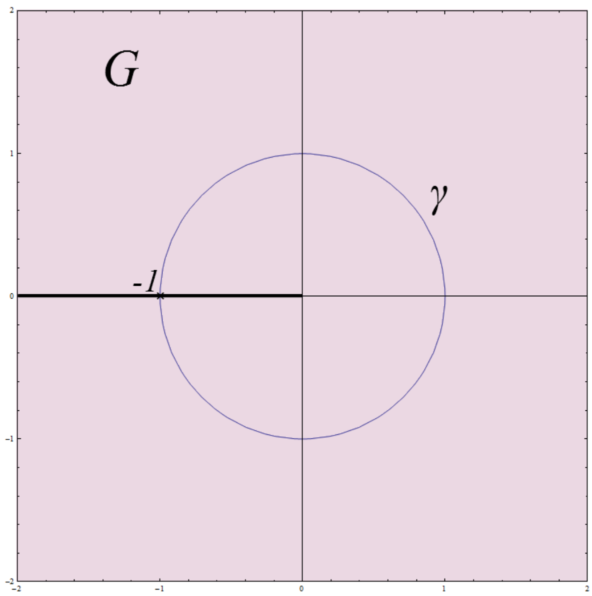
$$\int_\gamma z^3 dz = \frac{z^4}{4}\Big|_5^{4\mathrm{i}} = \frac{(4\mathrm{i})^4}{4} - \frac{5^4}{4} = -\frac{369}{4}$$

$z^3 = \left(\frac{z^4}{4}\right)'$ ... brauchen die Parametrisierung der Kurve nicht!

Beispiel. γ: Kreis um Ursprung

$\oint_\gamma \frac{1}{z} dz \qquad (= 0\ ???)$

Die Voraussetzungen des vorigen Satzes sind **nicht** gegeben! Zwar ist $\frac{1}{z} = (\ln z)'$, aber $\ln z$ **ist nicht auf ganz** γ **analytisch** (nämlich bei $z = -1$ nicht) $\Rightarrow \gamma \not\subset G = \mathbb{C} \setminus$ negative reelle Achse.



explizite Rechnung:

$$\begin{aligned} \gamma : z(t) &= re^{\mathrm{i}t} \qquad t \in [0, 2\pi] \text{ Kreis um Ursprung} \\ \dot{z} &= \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \frac{1}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{\mathrm{i}t}} \cdot \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t} dt \\ &= \mathrm{i} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathrm{i} \qquad \text{Sehr wichtiges Ergebnis!!} \end{aligned}$$

Beispiel. Sei γ ein Kreis um den Ursprung mit Radius r.

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 0$$

Der vorige Satz ist in diesem Fall **anwendbar**:
$\frac{1}{z^2} = (-\frac{1}{z})'$ und es existiert ein Gebiet G wo $(-\frac{1}{z})$ analytisch ist **und** $\gamma \in G$ liegt. Ein Beispiel für G wäre z.B. das Äußere eines Kreises um den Ursprung mit Radius $\frac{r}{2}$.

Explizite Rechnung:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \frac{1}{z^2} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 e^{2\mathrm{i}t}} \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t} dt \\ &= \frac{\mathrm{i}}{r} \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}t} dt \\ &= \frac{\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}}{r} e^{-\mathrm{i}t} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{r}(1-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wann ist nun eigentlich immer $\oint f dz = 0$?

2.4.2 Cauchyscher Integralsatz

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ oder $G \subset \mathbb{C}$ heisst **einfach zusammenhängend**, wenn jede geschlossene Kurve in G auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.

Beispiel. Eine Hohlkugel im $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend, ein Kreisring im $\mathbb{R}^2$ ist nicht einfach zusammenhängend, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein* einfach zusammenhängendes Gebiet. *Ist $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch in G, dann gilt für jeden (stückweise stetigen) geschlossenen Weg $\gamma \in G$*

$$\oint_\gamma f(z) dz = 0.$$

Auch folgendes Korollar des Cauchyschen Integralsatzes ist gültig:

Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein nicht notwendigerweise einfach zusammenhängendes Gebiet, sei $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch in G, dann gilt für jeden (stückweise stetigen) geschlossenen Weg γ, der in einem **einfach zusammenhängenden Teilgebiet** von G liegt*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Wir beweisen (da leichter): Sei f analytisch mit **stetigen partiellen** Ableitungen im einfach zusammenhängenden Gebiet G dann ist $\oint f dz = 0$.

Beweis. Dieser erfolgt mittels des Stokeschen Satzes der reellen Analysis.

$$\text{Aus } \mathrm{rot}\vec{F} = 0 \text{ folgt auf einfach zusammenhängendem Gebiet} \Rightarrow \oint_\gamma \vec{F} d\vec{x} = 0$$

Zunächst betrachten wir

$$\oint_\gamma f dz = \oint_\gamma \overbrace{(udx - vdy)}^{=:\vec{F}d\vec{x}} + \mathrm{i} \oint \overbrace{(udy + vdx)}^{=:\vec{G}d\vec{x}}$$

Wegen der CR Dgl. folgt sogleich $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$ sowie $\mathrm{rot}\vec{G} = 0$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathrm{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathrm{rot}\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Wir wenden den Stokesschen Satz sowohl für $\vec{F}$ als auch für $\vec{G}$ an

$$\oint_\gamma \vec{F} d\vec{x} = 0, \quad \oint_\gamma \vec{G} d\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \oint_\gamma f dz = 0$$

□

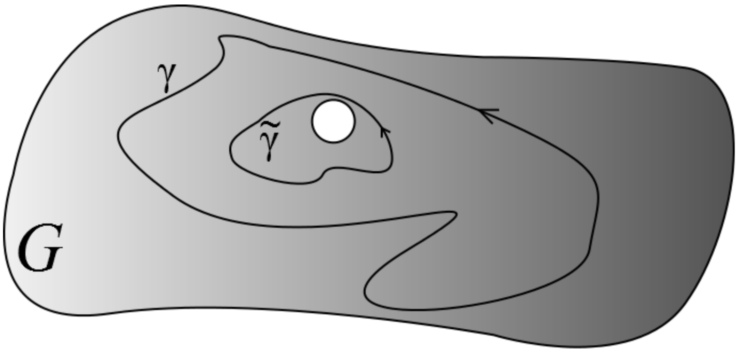
Beispiel. $\int_{\text{Einheitskreis um } 0} (\sinh z)^2 dz = 0$

2.4.3 Deformations Theorem

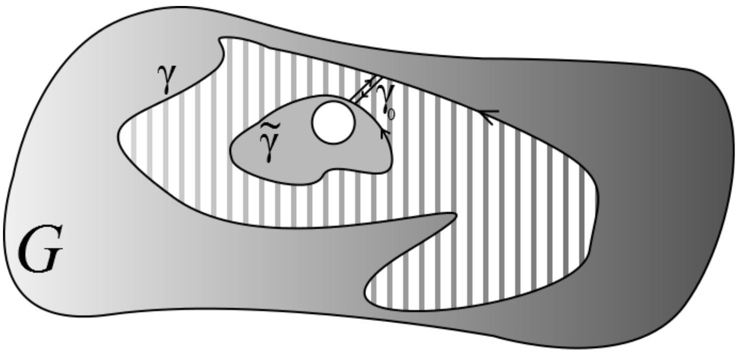
Sei f analytisch in einem (nicht notwendigerweise einfach zusammenhängenden) Gebiet G und sei γ eine geschlossene Kurve in G. Angenommen man kann γ in eine andere geschlossene Kurve $\tilde{\gamma}$ stetig deformieren (ohne G zu verlassen) dann gilt:

$$\oint_\gamma f dz = \oint_{\tilde{\gamma}} f dz$$

Konvention: γ und $\tilde{\gamma}$ sind gegen den Uhrzeigersinn orientiert.



Beweis. Wir fügen das Wegstück γ_0 hinzu und erhalten die Kurve $\gamma + \gamma_0 - \tilde{\gamma} - \gamma_0$. Der gestrichelte Zwischenbereich ist einfach zusammenhängend, f ist dort analytisch, es gilt also der Cauchysche Integralsatz.



$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \oint_{\gamma+\gamma_0-\tilde{\gamma}-\gamma_0} f dz \\ &= \oint_\gamma f dz + \int_{\gamma_0} f dz - \oint_{\tilde{\gamma}} f dz - \int_{\gamma_0} f dz \end{aligned}$$

und somit

$$0 = \oint_\gamma f dz - \oint_{\tilde{\gamma}} f dz$$

□

Beispiel. $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit γ einer geschlossenen Kurve um 0.

$$\oint_\gamma \frac{1}{z} dz \overset{\text{Deformations Theorem}}{=} \oint_{\text{Kreis um } 0} \frac{1}{z} dz = \overbrace{2\pi\mathrm{i}}^{\text{wissen wir schon}}$$

2.4.4 Cauchysche Integralformel

Satz. *Sei f analytisch in einem (nicht notwendigerweise einfach zusammenhängenden) Gebiet G, sei $z_0 \in G$, sei γ eine um z_0 herumgehende Kurve in einem* ***einfach zusammenhängenden Teilgebiet*** *von G. Dann gilt:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Bemerkung. Diese Gleichung besagt, dass die Werte von f auf γ **alle** Werte von f **innerhalb von** γ festlegen!

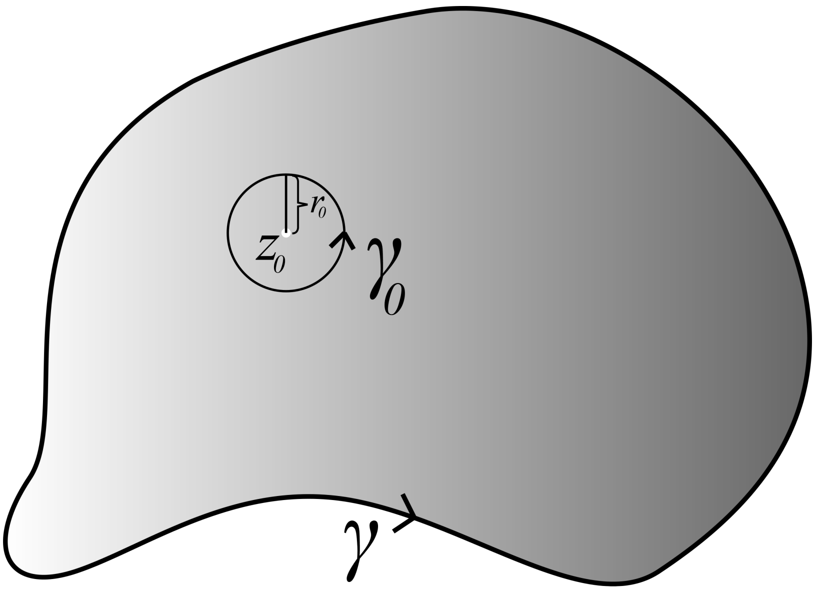
Beweis. Betrachten zuerst

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

g ist analytisch in $G \setminus \{z_0\}$ und in z_0 stetig. Dies gilt, weil f in z_0 differenzierbar ist und als Folge davon auch dort stetig ist. Wir wollen anfänglich zeigen, dass

$$\oint_\gamma g \; dz = 0$$

und verwenden dafür das *Deformationstheorem*



$$\oint_\gamma g \; dz = \oint_{\gamma_0} g \; dz$$

wobei γ_0 ein infinitesimal kleiner Kreis mit Radius r_0 um z_0 ist.

Da g stetig in und um z_0 herum ist, ist es innerhalb von γ_0 beschränkt.

$$\left| \oint_{\gamma_0} g \; dz \right| \leq \text{konst} \cdot \underbrace{2\pi r_0}_{\text{Umfang von } \gamma_0} \to 0 \qquad \text{für } r_0 \to 0$$

Somit

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_\gamma g\, dz = \oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \\ 0 &= \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - f(z_0) \underbrace{\oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0}}_{2\pi\mathrm{i}} \end{aligned}$$

und damit

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)\, dz}{z-z_0}$$

□

Beispiel. Wir überprüfen die Cauchysche Integralformel für $f(z) = z^2$, diese Funktion ist - wie wir wissen - analytisch auf ganz $\mathbb{C}$. Sei $z_0 = \mathrm{i} \to f(\mathrm{i}) = -1$. Für γ wählen wir eine beliebige geschlossene Kurve um $z_0 = \mathrm{i}$.

Cauchysche Integralformel:

$$\begin{aligned} f(i) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\text{Kreis um i}} \frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\, dz \end{aligned}$$

$z(t) = \mathrm{i} + re^{\mathrm{i}t}$
$\dot{z}(t) = r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}$

$$\begin{aligned} f(\mathrm{i}) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(\mathrm{i}+re^{\mathrm{i}t})^2 \mathrm{i}\, re^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}+re^{\mathrm{i}t}-\mathrm{i}}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{i}^2 + \underbrace{2\mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}}_{\to 0} + \underbrace{r^2e^{2\mathrm{i}t}}_{\to 0} \right) dt \\ &= -1 \end{aligned}$$

2.4.5 Cauchysche Integralformel für Ableitungen

Satz. ***Cauchysche Integralformel für Ableitungen*** *Sei f analytisch in einem (nicht notwendigerweise einfach zusammenhängenden) Gebiet G. Sei $z_0 \in G$ und γ eine um z_0 herumgehende Kurve in einem* ***einfach zusammenhängendem Teilgebiet*** *von G. Dann gilt*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Bemerkung. Die Cauchysche Integralformel für Ableitungen impliziert, dass jede analytische Funktion f beliebig hohe Ableitungen besitzt!

Bemerkung. Merkregel: $f^{(n)}(z_0)$ stimmt mit formalem n-fachen Differenzieren der Cauchyschen Integralformel nach z_0 überein.

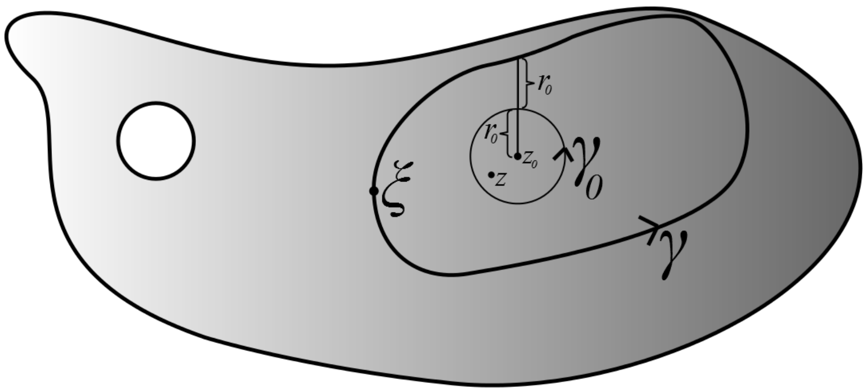
z.B. folgt aus

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \Rightarrow$$

durch Differenzieren nach z_0

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{df(z_0)}{dz_0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma f(z) dz \frac{d}{dz_0} \left(\frac{1}{z-z_0} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} \end{aligned}$$

Beweis der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen:



Sei ein Kreis γ_0 mit Radius r_0 so gewählt, dass der kürzeste Abstand von γ_0 zu γ gerade r_0 ist; sei z ein Punkt innerhalb γ_0, sei ξ ein Punkt auf γ. Dann gilt $|z - z_0| \leq r_0$, $|\xi - z_0| \geqslant 2r_0$ und $|\xi - z| \geq r_0$. Diese Relationen können grafisch sofort abgelesen, bzw. allenfalls mittels Dreiecksungleichung bewiesen werden.
Somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\xi - z_0|} &\leq \frac{1}{2r_0} \\ \frac{1}{|\xi - z|} &\leq \frac{1}{r_0} \end{aligned}$$

Zeigen nun, dass

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^2} \right] = 0$$

Zu diesem Zwecke betrachten wir diese Größe mittels Cauchyscher Integralformel

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma f(\xi) d\xi \underbrace{\left[\frac{1}{z-z_0} \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0} \right) - \frac{1}{(\xi - z_0)^2} \right]}_{\frac{z-z_0}{(\xi-z)(\xi-z_0)^2}}$$

Weil f auf γ analytisch ist, ist es auf γ durch eine Konstante beschränkt, daraus folgt mit den Ungleichungen für $\frac{1}{|\xi - z_0|}$, $\frac{1}{|\xi - z|}$ dass

$$\left| \frac{z - z_0}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)^2} \right| \leq \frac{|z - z_0| \cdot \mathrm{const} \cdot \mathrm{Umfang}(\gamma)}{2\pi 4 r_0^3}$$

Der Umfang(γ) ist von konstantem Betrag, r_0 ist fix gegeben. Wenn wir im obigem Ausdruck den $\lim_{z \to z_0}$ nehmen, verschwindet dieser, q.e.d.

Beispiel. Sei γ Einheitskreis um 0.

$$\oint_\gamma \frac{\sin z}{z^2} dz = ?$$

$$\begin{aligned} (\sin z)' \Big|_{z=0} &= \cos z \Big|_{z=0} = 1 \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{\sin z}{z^2} dz \quad \Rightarrow \\ \oint_\gamma \frac{\sin z}{z^2} dz &= 2\pi \mathrm{i} \end{aligned}$$

Bemerkung. Der Beweis der Cauchyschen Integralformel für höhere Ableitungen erfolgt mittels vollständiger Induktion!

2.5 Reihenentwicklungen

2.5.1 Grundlagen zu Reihenentwicklungen

Im **Reellen:**

- Eine differenzierbare Funktion muß nicht beliebig oft differenzierbar sein, also muß nicht notwendigerweise die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n$ existieren. Beispiel:

  $$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \geq 0 \\ -x^2 & : x \leq 0 \end{cases}$$

  Diese ist einmal differenzierbar mit $f'(x) = 2|x|$ aber eine zweite Ableitung existiert nicht in $x = 0$.

- Selbst wenn die Taylorreihe existiert, muß diese **nicht notwendigerweise** gegen die **vorgegebene Funktion konvergieren**.

  $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

  Nun ist $f'(x) = \frac{1}{2x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0$ (für $x \to 0$) und sogar alle Taylorkoeffizienten $f^{(n)}(x) \to 0$ (für $x \to 0$), sodass die Taylorreihe von $f(x)$ in jeder Umgebung von 0 verschwindet. Die Taylorreihe gibt $f(x)$ also nicht richtig wieder, da $f(x)$ in einer Umgebung von 0 nicht verschwindet!

Im **Komplexen** werden wir zeigen: Wenn f analytisch ist, dann existieren beliebig hohe Ableitungen (wissen wir schon) und die Taylorreihe konvergiert immer gegen f, die Konvergenz ist gleichmäßig und absolut (siehe anschließenden Beweis).

Definition. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen $f(z)$, wenn für $S_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ gilt

$$|S_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall\, |z - z_0| < R \text{ und } \forall n > N_\epsilon$$

Definition. Eine Potenzreihe **konvergiert absolut**, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ konvergiert.

Satz. ***Weierstrass'sches Majorantenkriterium:***
Sei $f_n(z)$ eine Folge von Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Wenn es reelle Konstante $m_n \geqslant 0$ gibt mit

- $|f_n(z)| \leq m_n \qquad \forall z \in G$
- $\sum_{n=0}^{\infty} m_n < \infty$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ absolut und gleichmäßig (ohne Beweis, wie im Reellen).

Beispiel. Als zentrales Beispiel beweisen wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ innerhalb des offenen Einheitskreises gegen die analytische Funktion $\frac{1}{1-z}$ konvergiert, wobei die Konvergenz absolut und gleichmäßig ist.

- Für z innerhalb des offenen Einheitskreises gilt $|z| \leq r, r < 1$. Verwenden das Weierstrass'sche Majorantenkriterium:
$$|z^n| = |z|^n \leq r^n \quad \text{wo } 0 \leq r < 1$$
Da $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ für $0 \leq r < 1$ konvergiert, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut und gleichmäßig.
- Was ist der Grenzwert von $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$? Verwenden Trick: $1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}$ sodass
$$|1 + z + z^2 + ... + z^n - \frac{1}{1-z}| = \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0 \quad (\text{für } n \to \infty)$$
wobei wir verwendeten, dass
$$1 = |1 - z + z| \leq |1 - z| + |z| \leq |1 - z| + r$$
$$1 - r \leq |1 - z|$$
$$\frac{1}{|1-z|} \leq \frac{1}{1-r}$$

Beispiel. Analog gilt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$ für $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$ absolut und gleichmäßig gegen die analytische Funktion $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$ konvergiert.

Ohne Beweis möchte ich nun einen im Komplexen gültigen Satz über den im Reellen bekannten Konvergenzradius anführen (der Beweis ist einigermaßen aufwendig und kann hier nicht durchgeführt werden):

Satz. *Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, wobei $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, besitzt einen eindeutigen Konvergenzradius R (auch $R = \infty$ ist erlaubt), wobei für $|z - z_0| < R$* ***gleichmäßige*** *und* ***absolute*** *Konvergenz vorliegt, bzw. für $|z - z_0| > R$ Divergenz besteht.*

Bemerkung. Der Konvergenzradius berechnet sich gemäß

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

oder

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad R = \frac{1}{\rho}$$

Beispiel. Für $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist $R = 1$ da $a_n = 1$.

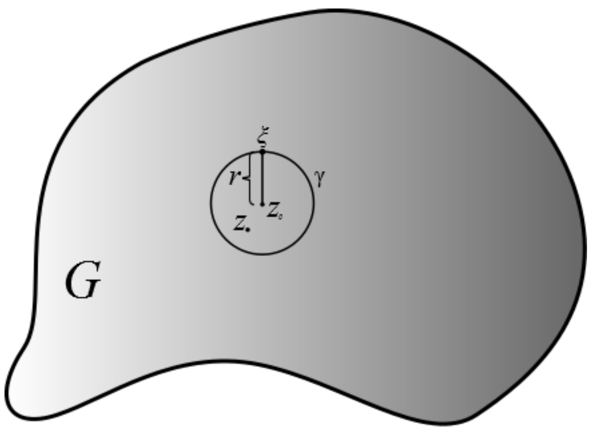
2.5.2 Taylor Reihe

Satz. ***Taylor Reihe***
Sei f analytisch in G, sei $z_0 \in G$ und γ ein Kreis in G mit Radius r um z_0. Dann gilt für alle z im Inneren des Kreises

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

wobei die Konvergenz absolut und gleichmäßig ist.

Bemerkung. Wir können den Radius r - und damit die Gültigkeit der Talor-Entwicklung - solange vergrößern, bis wir an eine Singularität von f stoßen. Die in Bezug auf z_0 nächstliegende Singularität bestimmt somit den Konvergenzradius der Taylor-Reihe um z_0. Ist f in der ganzen komplexen Ebene analytisch, so lässt sich f auf ganz $\mathbb{C}$ als Potenzreihe darstellen.



Beweis. Sei ξ ein Punkt am Kreis γ. Es gilt in diesem Fall $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$. Die Cauchy'sche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma f(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi$$

lässt sich mittels

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$$

umschreiben. Da $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$ erhalten wir

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

wobei gleichmäßige und absolute Konvergenz vorliegt und somit

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n$$

Da die Konvergenz gleichmäßig und absolut ist, darf gliedweise integriert werden

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi}_{\text{C.I.Formel für Ableitungen}} \Rightarrow \\ f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

□

Beispiel.

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \text{ und } z_0 = 0 \\ f'(z) &= e^z = f''(z) = ... \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n = \frac{1}{n!}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{sowie berechnen wir } R = \infty$$

Dies passt perfekt zur Definition $e^z = e^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y)$ von früher (siehe ÜM1).

Beispiel. $f(z) = \ln(1 + z)$

$z_0 = 0$, dort ist $f(t)$ analytisch und $f(0) = 0$.

$f'(z) = \frac{1}{1+z}$	$f'(0) = 1$
$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}$	$f'''(0) = 2$
$f^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(z+1)^n}$	$f^{(n)}(0) = (n-1)!(-1)^{n-1}$

Taylor Reihe: $\ln(1 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$

Wir berechnen sofort $R = 1$ bzw erkennen dies anschaulich wegen der Singularität von $\ln(1 + z)$ an der Stelle $z = -1$.

Bemerkung. Anstatt die explizite Taylorreihenentwicklung vorzunehmen, ist es oft einfacher, die Formel für geometrische Reihe, Produktformel oder Partialbruchentwicklung zu verwenden.

Beispiel.

$$\frac{e^z}{1-z} = \frac{1}{1-z}e^z = \overbrace{(1+z+z^2+...)}^{\text{Geom. Reihe}} \cdot \overbrace{(1+z+\frac{z^2}{2}+...)}^{e^z}$$
$$= \quad ... = 1+2z+\frac{5z^2}{2}+...$$

$R = 1$

2.5.3 Laurent Reihe

Satz. ***Laurent Reihe***
*Sei f analytisch in einem **Kreisring** G um z_0, mit $r_1 < |z-z_0| < r_2$, wo $z \in G$. Es existiert keine Taylorreihe, jedoch die Laurent Reihe*

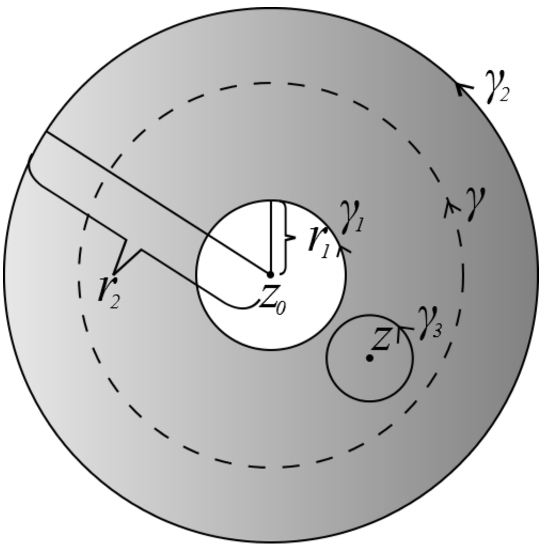
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$, $n \in \mathbb{Z}$ und wo γ ein Kreis um z_0 mit Radius r mit $r_1 < r < r_2$ ist. Die Konvergenz erfolgt absolut und gleichmäßig.

Bemerkung. Im Allgemeinen ist f innerhalb von γ_1 nicht analytisch und man darf für $n > 0$ **nicht** die Cauchysche Integralformel für Ableitungen verwenden: $a_n \neq f^{(n)}(z_0)$, da $f^{(n)}(z_0)$ ja gar nicht existiert.

Bemerkung. Die Laurentreihenentwicklung enthält als Spezialfall die Taylorreihenentwicklung: Wenn f auch innerhalb von γ_1 analytisch ist, so sind einerseits $a_{-1} = a_{-2} = ... = 0$ (dies folgt mittels Cauchyschen Integralsatzes aus $\oint_\gamma f(\xi)(\xi-z_0)^k d\xi = 0, \quad k = 0,1,2,...$), andererseits darf man für $n > 0$ die Cauchysche Integralformel für Ableitungen verwenden $a_n = f^{(n)}(z_0)$.

Beweis. Für den Bewies der Laurentreihenentwicklung führen wir für eine Hilfsüberlegung einen Kreis γ_3, der um z herumführt, ein.



Verwenden das Deformationstheorem

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi_2)}{\xi_2 - z} d\xi_2 \overset{\text{Def. Theorem}}{\overbrace{=}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi_1)}{\xi_1 - z} d\xi_1 + \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_3} \frac{f(\xi_3)}{\xi_3 - z} d\xi_3}_{\text{Cauchy'sche Integralformel: } = f(z)}$$

Bemerkung. Da $f(z)$ innerhalb γ_3 analytisch ist, durften wir die Cauchy'sche Integralformel verwenden.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi_2)}{\xi_2 - z} d\xi_2 - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi_1)}{\xi_1 - z} d\xi_1$$

z **innerhalb** γ_2:

$$\frac{1}{\xi_2 - z} = \frac{1}{\xi_2 - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi_2 - z_0}} = \frac{1}{\xi_2 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi_2 - z_0} \right)^n$$

z **außerhalb** γ_1:

$$\frac{1}{\xi_1 - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi_1 - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

Im Folgenden ist gliedweise Integration erlaubt, da absolute und gleichmäßige Konvergenz vorliegt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi_2) d\xi_2}{(\xi_2 - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} f(\xi_1) d\xi_1 (\xi_1 - z_0)^n (z - z_0)^{-n-1}}_{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi_1) d\xi_1}{(\xi_1 - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \qquad \text{mittels Def. Theorem} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Hier ist γ ein beliebiger Kreis zwischen γ_1 und γ_2. □

Bemerkung. Anstatt die expliziten Integrationen vorzunehmen, ist es oft einfacher, die Formeln für geometrische Reihen oder Partialbruchentwicklung zu verwenden!

Beispiel. Gesucht ist Laurentreihenentwicklung von $f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{z-1}$, für $0 < |z| < 1$, $z_0 = 0$. Explizit berechnen wir z.B. a_{-2} und a_{-1}

$$\begin{aligned} a_{-2} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\text{Kreis um 0, } 0<r<1} dw \quad \underbrace{\frac{1}{w(w-1)w^{-1}}}_{= \frac{1}{w-1} \text{ analytisch innerhalb des Kreises}} \overset{\text{Cauchyscher Integralsatz}}{\overbrace{=}} 0 \\ a_{-1} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\text{Kreis um } 0, 0<r<1} \frac{dw}{w} \quad \underbrace{\frac{1}{w-1}}_{\text{analytisch innerhalb des Kreises}} \overset{\text{Cauchysche Integralformel}}{\overbrace{=}} \left. \frac{1}{w-1} \right|_{w=0} = -1 \end{aligned}$$

Etwas einfacher berechnen wir a_{-1} mittels der Formel für die geometrische Reihe

$$f(z) = \frac{1}{z}(-1)\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}(1 + z + z^2 + ...) = -(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + ...)$$

oder mit Partialbruchentwicklung

$$\begin{aligned} f(z) &= \text{(Partialbruchentwicklung)} = -\frac{1}{z} - \overbrace{\frac{1}{1-z}}^{\text{geom. Reihe}} = -\frac{1}{z} - (1 + z + z^2 + ...) \\ &= -(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + ...) \end{aligned}$$

Wir lesen ab, dass $a_{-2} = 0$, $a_{-1} = -1$

2.6 Residuensatz

2.6.1 Pol k-ter Ordnung

Definition. Ist $f(z)$ in beliebig kleiner Umgebung von z_0 analytisch (d.h. für $\{z|\, 0 < |z - z_0| < r_2\}$) mit Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + ... + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

definiert dies einen Pol **k-ter Ordnung** in z_0.

Definition. Ein Pol 1-ter Ordnung heißt auch **einfacher** Pol.

Definition. $k = \infty$ heißt **wesentliche** Singularität.

Definition. Eine Funktion, die in einem Gebiet G bis auf Pole analytisch ist, heißt **meromorphe** Funktion.

Beispiel. $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-1}$ hat sowohl einen Pol 1. Ordnung in $z_0 = 0$, da

$$f(z) = \frac{1}{z}(-1)\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}(1 + z + z^2 + ...) = -(\underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Pol 1. Ordnung}} + 1 + z + ...)$$

als auch einen Pol 1. Ordnung in $z_0 = 1$, da

$$f(z) = \frac{1}{1 + (z-1)}\,\frac{1}{z-1} = \big(1 - (z-1) + (z-1)^2 - ...\big)\,\frac{1}{z-1} = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{Pol 1. Ordnung}} - 1 + (z-1) - ...$$

Beispiel. $f(z) = \frac{5-\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^3}$ hat einen Pol 3-ter Ordnung in $z_0 = -\mathrm{i}$

Beispiel. $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$ hat sowohl einen Pol 1-ter Ordnung in $z_0 = \mathrm{i}$ als auch einen Pol 1-ter Ordnung in $z_0 = -\mathrm{i}$. Dies folgt z.B. für $z_0 = \mathrm{i}$, für $0 < |z - \mathrm{i}| < 2$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{2i+z-\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{2i}}\right) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\underbrace{\frac{1}{z-\mathrm{i}}}_{\text{Pol 1. Ordnung}} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(1 - \frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} + ...\right)\right)
\end{aligned}
$$

Beispiel. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ hat **keinen** Pol in $z_0 = 0$, sondern eine **hebbare** Singularität, denn

$$
f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + ...}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + ...
$$

Beispiel. $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + ...$ hat wesentliche Singularität bei $z_0 = 0$

2.6.2 Residuensatz

Definition. a_{-1} heißt Residuum von f an der Stelle z_0.

$$
a_{-1} \equiv \mathrm{Res}(f, z_0)
$$

Anstatt mit der Laurentreihenentwicklung kann das Residuum sehr rasch mit folgender Formel berechnet werden:

Satz.

- *Es habe $f(z)$ in z_0 einen einfachen Pol, dann gilt*

$$
\mathit{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z)\right]
$$

- *Es habe $f(z)$ in z_0 einen Pol k-ter Ordnung, dann gilt*

$$
\mathit{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-z_0)^k f(z)\right)\right]
$$

Beweis. Wir beweisen den Fall $k = 1$, der allgemeine Fall folgt analog. Laut Voraussetzung gilt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\
(z - z_0) f(z) &= a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}
\end{aligned}
$$

sodass

$$
\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z)\right] = a_{-1}
$$

□

Beispiel.

$$
f(z) = \frac{1}{z(z-1)}
$$

$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0}\left[z \cdot \frac{1}{z(z-1)}\right] = -1$

Beispiel.

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) &= \lim_{z\to\mathrm{i}}\left[(z-\mathrm{i})\frac{1}{z^2+1}\right]\\ &= \lim_{z\to\mathrm{i}}\left[(z-\mathrm{i})\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}\right]\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\end{aligned}$$

Satz. ***Residuensatz*** *Sei f analytisch bis auf einen Pol k-ter Ordnung in z_0, sei γ eine um z_0 einmal herumführende geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\ \ Res(f, z_0)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\oint_\gamma f(z)dz &= \oint_\gamma [\underbrace{\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}}_{\to 0} + \underbrace{\ldots}_{\to 0} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{\to 0}]dz\\ &= a_{-1}\oint \frac{1}{z-z_0}dz\\ &= a_{-1}\,2\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

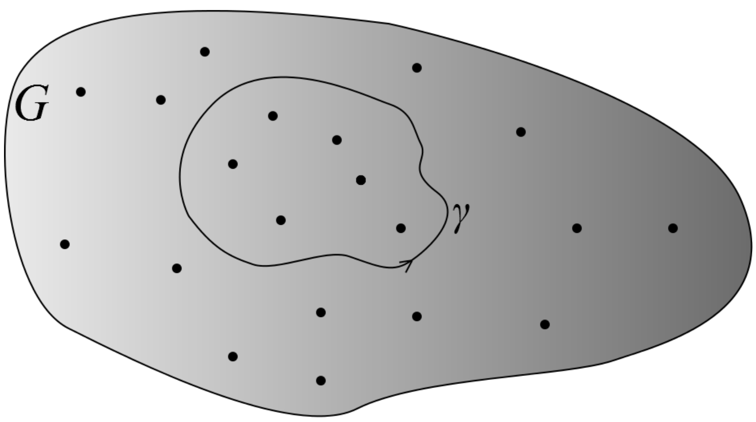
□

Allgemeiner Residuensatz:

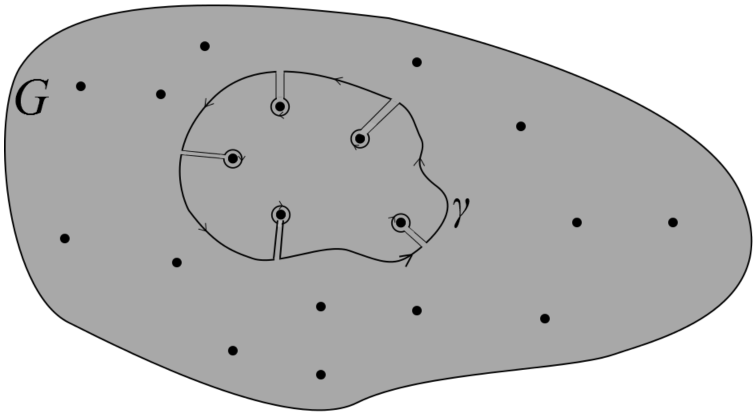
Satz. *Sei f analytisch in G bis auf Pole in den Punkten z_1, z_2, ..., $z_n \in G$. Dann gilt für eine geschlossene Kurve $\gamma \subset G$:*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k)$$

*wo die **Summe über** alle von γ **eingeschlossenen Singularitätssstellen** genommen wird!*



Beweis. Beweis des Residuensatzes mittels **Deformationstheorem**



$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\oint_{\gamma_k} f(z)dz}_{2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res}(f,z_k)}$$

□

2.7 Berechnung von (reellen) Integralen mittels des Residuensatzes

2.7.1 Integrale des Typs $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Satz. *Sei $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, wo g, h Polynome in x mit $\mathrm{Grad}\, h \geq \mathrm{Grad}\, g + 2$, $h(x)$ habe überdies keine* ***reelen*** *Nullstellen. Dann gilt*

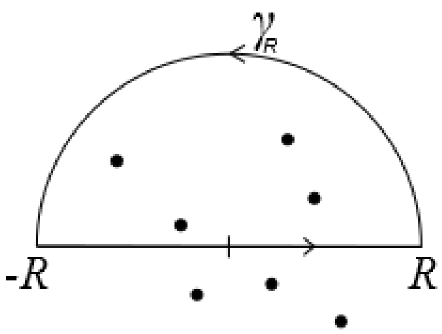
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k)\Big|_{Im\, z_k > 0}$$

(Summe über all Pole in der oberen Halbebene) oder genauso

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi \mathrm{i} \sum_{l=1}^{n} Res(f, z_l)\Big|_{Im\, z_l < 0}$$

(Summe über alle Pole in der unteren Halbebene)

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall in der oberen komplexen Halbebene



$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx + \overbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz}^{=0}}_{\text{Geschl. Weg}\Rightarrow\text{Residuensatz}} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f,z_k)\Big|_{Im\, z_k>0}\end{aligned}$$

Hier bezeichnet γ_R einen Halbkreis mit Radius R in der oberen komplexen Halbebene, zu zeigen ist

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \underbrace{\max_{|z|=R}|f(z)|}_{\frac{1}{R^2}} \cdot R\pi = \frac{\pi}{R} \to 0$$

Der Beweis für den unteren Halbkreis ist ähnlich, γ_R bezeichnet hier einen Halbkreis mit Radius R in der unteren komplexen Halbebene:

$$\underbrace{\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} f(x)dx + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)dx}_{=0}\right)}_{\text{geschlossener Weg}} = \overbrace{-}^{\text{weil im Uhrzeigersinn}} 2\pi\mathrm{i}\sum_{l=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_l)\Big|_{Im\, z_l<0}$$

□

Beispiel.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\pi\mathrm{i}\,\overbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^2},\mathrm{i}\right)}^{\frac{1}{2\mathrm{i}}} = \pi$$

2.7.2 Integrale vom Typ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}kx}dx$

Satz. *Sei $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, wo g, h Polynome in x von $Grad\, h \geq Grad\, g + 1$, $f(x)$ habe keine* ***reellen*** *Polstellen, es sei $k \in \mathbb{R}$. Es gilt (ohne Beweis) analog zu 1.7.1*

Achtung Fallunterscheidung nötig! Auf Vorzeichen von k achten!

$$k > 0: \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}kx}dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m} Res(f(z)e^{ikz}, z_j)\Big|_{Im\ \ z_j>0}$$

(Summe über all Pole in der oberen Halbebene)

$$k < 0: \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}kx}dx = -2\pi\mathrm{i}\sum_{l=1}^{n} Res(f(z)e^{ikz}, z_l)\Big|_{Im\ \ z_l<0}$$

(Summe über all Pole in der unteren Halbebene)

Bemerkung. **Merkregel**
Der Beitrag des ∞-Halbkreises muss verschwinden
$\Rightarrow$ wir müssen für $k > 0$ oben schließen (d.h. $z \to \mathrm{i}\infty$): $e^{\mathrm{i}kz} \to e^{\mathrm{i}k\mathrm{i}\infty} = e^{-k\infty} \to 0$
$\Rightarrow$ wir müssen für $k < 0$ unten schließen (d.h. $z \to -\mathrm{i}\infty$): $e^{\mathrm{i}kz} \to e^{\mathrm{i}k(-\mathrm{i}\infty)} = e^{k\infty} \to 0$

Bemerkung. mittels Bildung von Real- und Imaginärteil gelten analoge Formeln auch für

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos kx dx \ , \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin kx dx$$

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx &= Re(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x} dx}{x^2+1}) \\
&= Re(2\pi\mathrm{i} \quad \underbrace{\mathrm{Res}(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}, \mathrm{i})}_{\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{(z-\mathrm{i})e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}) = \frac{e^{-1}}{2\mathrm{i}}} \\
&= Re\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} e^{-1}\right) = \pi e^{-1}
\end{aligned}$$

Definition. Fouriertransformation

$$(Ff)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}kx} dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

Zu beachten ist die Konvention in der Definition des Vorzeichens im Exponenten!

Beispiel. Sei $f(x) = \frac{1}{9+x^2}$, $(Ff)(k) = ?$
Sei zunächst $k \geqslant 0$, dann müssen wir auf Grund der Konvention des Vorzeichens im Exponenten unten schließen, es trägt der Pol $z_0 = -3i$ bei:

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \, Res(\frac{e^{-ikz}}{(z+3i)(z-3i)}, z_0 = -3i) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{-3k}$$

Für $k < 0$ müssen wir oben schließen, es trägt der Pol $z_0 = 3i$ bei:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \, Res(\frac{e^{-ikz}}{(z+3i)(z-3i)}, z_0 = 3i) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{3k}$$

Wir können das Ergebnis zusammenfassen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9+x^2} e^{-\mathrm{i}kx} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{-3|k|}$$

2.7.3 Hauptwert von (reellen) Integralen $P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

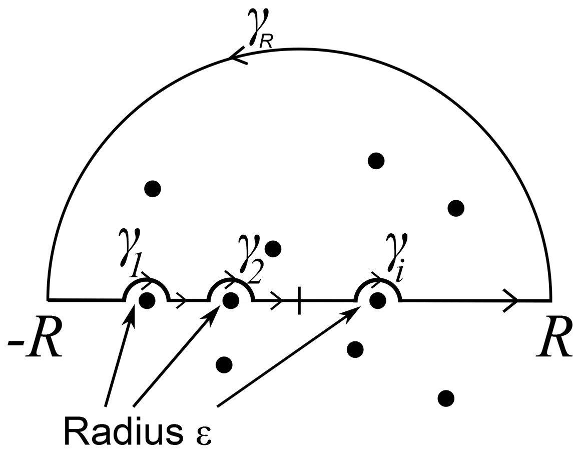
Satz. *Wenn $f(x)$ bei $x_k \in \mathbb{R}, k = 1, ..., m$ unbeschränkt ist, so existiert möglicherweise der* Hauptwert *(englisch: principal value oder principal part) des Integrals:*

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{x_1-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} f(x)dx + ... \int_{x_k+\epsilon}^{\infty} ... \right)$$

*Wenn Integrale vom Typ 2.7.1 oder 2.7.2 betrachtet werden und zusätzlich **einfache (!) Pole auf der reellen Achse** vorliegen, gilt (wenn oben geschlossen werden kann)*

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi\mathrm{i}\sum(\textit{Residuen von } f \textit{ in oberer Halbebene}) + \pi\mathrm{i}\sum(\textit{Residuen von } f \textit{ auf x-Achse})$$

Analoges Ergebnis erhalten wir mit negativem Vorzeichen falls unten geschlossen wird.



Beweis.

$$\lim_{R\to\infty} P\int_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\left(\sum_{\text{Pole } z_n\in[-R,R]} \overbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_k} f(z)dz}^{-\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}(f,z_k)}\right) + \overbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz}^{=0}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}(f,z_i)$$

Beweis der Beiträge um infinitesimale kleine Halbbögen:

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \int_{\gamma_k}\left(\frac{a_{-1}}{z-z_k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_k)^n\right)dz$$

$z(t) = z_k + \epsilon e^{\mathrm{i}t} \quad t\in[0,\pi]$
$\dot{z}(t) = \mathrm{i}\epsilon e^{\mathrm{i}t}$

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \underbrace{-a_{-1}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{i}\epsilon e^{\mathrm{i}t}}{z_k+\epsilon e^{\mathrm{i}t}-z_k}dt}_{-\mathrm{i}\pi a_{-1}=-\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}(f,z_k)} + O(\epsilon)$$

$\square$

Kapitel 3

Lineare Algebra

3.1 Vektorräume

Definition. Kommutative (=abelsche) Gruppe

Sei M eine Menge mit Abbildung „Addition“ $M \times M \to M$ wo

1. $\forall a, b \in M$ ist $a + b \in M$
2. $a + b = b + a$ (Kommutativität)
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
4. $\exists 0 \in M$ sodass $\forall a \in M : a + 0 = a$ (Nullelement)
5. $\forall a \in M$ existiert ein inverses Element $(-a)$ sodass $a + (-a) = 0$.

Dann heißt M Gruppe $(M, +)$.

Definition. Körper

Existieren auf der Menge K zwei verschiedene Abbildungen („Addition“ $+$ und „Multiplikation“ $\cdot$) mit

1. K ist eine kommutative Gruppe bezüglich der Addition $+$
2. $\forall a, b \in K$ ist $a \cdot b \in K$
3. $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität)
4. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)c$ (Assoziativität)
5. $\exists 1 \in K$ sodass $\forall a \in K :\ 1 \cdot a = a$ (Einheitselement)
6. $\forall a, a \neq 0 \in K$ existiert ein inverses Element a^{-1}, sodass $a \cdot a^{-1} = 1$
7. $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (Distributivität)

dann heißt die Menge K Körper $(K, +, \cdot)$

Definition. Vektorraum (VR)

Eine Menge von Elementen $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ...$ heißt Vektorraum (oder linearer Raum) V über einem Körper K (meistens $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), wenn unter den Elementen $\vec{a_i}$ eine Addition und eine Multiplikation mit einem Element $\lambda \in K$ (dem *Skalar*) definiert ist, wo gilt

1. $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe
2. $\forall \lambda \in K$ und $\vec{a} \in V$ ist $\lambda \vec{a} \in V$
3. $\lambda_1(\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \lambda_2)\vec{a}$ (Assoziativität)
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$ (Distributivität I)
5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ (Distributivität II)
6. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ wo 1 das Einheitselement aus K ist (dh $1 \cdot \lambda = \lambda \; \forall \lambda \in K$)

Beispiel. $\mathbb{R}$ ist VR über $\mathbb{R}$.

Beispiel. Die Menge $\mathbb{R}^n$ von $n-$Tupeln von Zahlen aus $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..n \right\}$$

ist VR über $\mathbb{R}$, wobei

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ ... \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel. Vektoren $\in \mathbb{R}^3$

Beispiel. Menge aller reelwertigen Funktionen, die auf $[a, b] \in \mathbb{R}$ definiert sind bildet einen VR über $\mathbb{R}$.

$$\{f | f : [a, b] \to \mathbb{R}\} \quad \text{wo}$$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \quad x \in [a, b] \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda f(x) \quad x \in [a, b] \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.1.1 Beispiel zur Verwendung der Axiome

Beispiel.

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

Beweis.
$$0 \cdot \vec{a} = (\lambda - \lambda) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{a} = \lambda\vec{a} + (-\lambda\vec{a}) = \vec{0}$$
□

Beispiel. Sei $\lambda \neq 0 : \lambda\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Beweis. Da $\lambda \neq 0\ \exists\lambda^{-1} : \lambda^{-1}(\lambda\vec{a}) = (\lambda^{-1}\lambda)\vec{a} = 1\vec{a} = \vec{a}$
Andrerseits $\lambda^{-1}(\lambda\vec{a}) = \lambda^{-1}\ \vec{0} = \lambda^{-1}[\vec{b} + (-\vec{b})] = \lambda^{-1}\vec{b} + (-\lambda^{-1}\vec{b}) = \vec{0}$
$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ □

Definition. Lineare Unabhängigkeit
n Elemente $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ...\vec{a_n}$ eines VR über K heißen linear unabhängige (l.u.a), wenn aus
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{0} \quad \lambda_i \in K$$
folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.
Andernfalls heißen sie **linear abhängig** (l.a.)

Beispiel. Im $\mathbb{R}^2$ sind $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ l.u.a.

Beweis. Sei $\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} = \vec{0}$
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$
□

Beispiel. Ein einzelner Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist l.u.a.

Beweis. $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, da $\exists a_i \neq 0 \Rightarrow \lambda a_i = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ □

Beispiel. $\vec{0}$ ist linear abhängig.

Beweis. Aus $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ folgt nicht $\lambda = 0$, wir können ja $\lambda = 1$ betrachten. □

Satz. *Sind $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ l.u.a. und $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}, \vec{a_{n+1}}$ l.a. so ist $\vec{a_{n+1}}$ eine Linearkombination von $\vec{a_1}, ...\vec{a_n}$.*

Beweis. Wenn $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{0}$ so sind nicht alle $\lambda_i = 0$. Sei $\lambda_{n+1} \neq 0$ dann ist
$$\vec{a_{n+1}} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} \vec{a_i}$$
Falls aber $\lambda_{n+1} = 0$ wäre, dürften für $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{0}$ nicht alle $\lambda_i = 0$ sein , daher wären $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ linear abhängig, Widerspruch. □

Satz. *Sind $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ...\vec{a_r} (r < n)$ linear abhängig, so sind auch $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_r}, \vec{a_{r+1}}, ..., \vec{a_n}$ linear abhängig.*

(ohne Beweis, siehe Übungen)

Behauptung. *Je drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind im $\mathbb{R}^2$ linear abhängig.*

Beweis. Zunächst gilt identisch

$$(b_1c_2 - b_2c_1)\vec{a} + (c_1a_2 - c_2a - 1)\vec{b} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{c} = \vec{0}$$

z.B.: 1.te Komponente:

$$(b_1c_2 - b_2c_1)a_1 + (c_1a_2 - c_2a - 1)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0$$

Sei nun $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig.
Dann folgt $(\ ) = (\ ) = (\ ) = 0$ also insbesondere $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Damit gilt identisch $b_2\vec{a} - a_2\vec{b} = \vec{0}$ sodass $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig sind (man kann nicht $b_2 = a_2 = 0$ folgern). Wenn $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig so sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig, Widerspruch! □

Definition. Dimension
Die maximale Zahl n von linear unabhängigen Vektoren im Vektorraum V über K heißt Dimension von V, $\dim V = n$

Beispiel.

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$

Definition. Basis
Sei $\dim V = n$. Je n linear unabhängige Vektoren aus V heißen eine Basis von V.

Satz. *Sei $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}\}$ eine Basis von VR V über K. Dann läßt sich jeder Vektor $\vec{x} \in V$ eindeutig nach dieser Basis entwickeln*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{b_i} \quad x_i \in K \textit{ eindeutig}$$

(ohne Beweis, siehe Übungen)

Satz. *Wenn $\vec{a_1}, ..., \vec{a_m}$ sowie $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ Basen von V so folgt $m = n$.*

Beweis.

1. $\vec{a_1}, ..., \vec{a_m}$ linear unabhängig $\rightarrow m \leq n$ da $\vec{b_i}$ Basis von n Elementen
2. $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ linear unabhängig $\rightarrow n \leq m$ da $\vec{a_i}$ Basis von m Elementen

□

Definition. Unterraum (UR)
Sei V ein VR über K. $U \subset V$ heißt Unterraum von V, wenn U (bezüglich der Verknüpfung in V) selbst VR ist.

Bemerkung.

$$\dim U \leq \dim V$$

Beispiel.

$$U = \{\lambda\vec{a} \mid \vec{a} \neq \vec{0} \text{ fest }, \lambda \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^2$$

Gerade durch Nullpunkt in Richtung $\vec{a}$, $\dim U = 1$

Definition. Menge aller Linearkombinationen von Vektoren $\vec{a_1}, ..., \vec{a_r} \in V$

$$\mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_r}) = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{a_i} | \lambda_i \in K\}$$

Man kann leicht zeigen

Satz. *Seien* $\vec{a_1}, ..., \vec{a_r} \in V$. *Dann ist* $U = \mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_r})$ *ein UR von V.*

Beispiel.

$$\begin{aligned} U &= \{\lambda\vec{a} \mid \vec{a} \neq \vec{0} \text{ fest}, \ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{L}(\vec{a}) \end{aligned}$$

Definition. Linear unabhängiges Erzeugendensystem
Linear unabhängige Vektoren $\vec{a_1}, ..., \vec{a_r} \in V$ heißen linear unabhängiges Erzeugendensystem von $U = \mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_4})$.

Beispiel. $\vec{e_1}, ..., \vec{e_r}$ linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$.

1. $\vec{e_1}, ..., \vec{e_r}$ linear unabhängig
2. $\vec{x} \in \mathbb{R}$ beliebig, $\vec{x} = x_i\vec{e_i} \Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{L}(\vec{e_1}, ..., \vec{e_r})$

Satz. *Wenn* $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ *eine Basis von VR V ist, so ist* $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ *ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von* V.

Beweis.

- Jeder Vektor aus V ist eine Linearkombination der Basis (siehe früher) $V \subset \mathbb{L}(\vec{b_1}, ..., \vec{b_n})$
- Linearkombinationen führen nicht aus V heraus! $\mathbb{L}(\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}) \subset V \Rightarrow V = \mathbb{L}(\vec{b_1}, ..., \vec{b_n})$

□

Satz. *Ein VR V hat genau dann* $\dim V = n$, *wenn V ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von n Vektoren besitzt.*

Beweis.
$\Rightarrow \dim V = n$, dh. es existiert eine Basis $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$, die (obiger Satz) ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.
$\Leftarrow$Sei $V = \mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_n})$mit $\vec{a_i}$ linear unabhägig, dann ist die Maximalzahl m von linear unabhängigen Vektoren $m \geq n$.
Daher existiert eine Basis von V $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ weil $V = \mathbb{L}(\vec{b_1}, ..., \vec{b_m}) = \mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_n})$ und deshalb ist $m = n$ (nach früherem Satz)

□

Beispiel.

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

(da $\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}$ linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$)

3.2 Lineare Abbildungen

Definition. Lineare Abbildung

Seien V, V' VR über demselben Körper K. Eine Abbildung $\sigma : V \to V'$ heißt linear (bzw. Homomorphismus) wenn

$$\sigma(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda\sigma(\vec{x}) + \mu\sigma(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \lambda, \mu \in K$$

Beispiel.

$$V = V' = \mathbb{R} \quad \sigma(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\sigma(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda\sigma(x) + \mu\sigma(y)$$

Beispiel.

$$V = V' = \mathbb{R} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad b \neq 0$$

$$\sigma(x) = ax + b \quad \text{ist keine lineare Abbildung}$$

Satz. *Jede lineare Abbildung führt den Nullvektor $\vec{0}$ aus V in den Nullvektor $\vec{0'}$ in V' über.*

Beweis.
Sei $\vec{x} \in V$

$$\sigma(\underbrace{\vec{0}}_{\in V}) = \sigma(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot \underbrace{\sigma(\vec{x})}_{\in V'} = \vec{0'}$$

□

Satz. *Eine lineare Abbildung bildet linear abhängige Vektoren auf linear abhängige Vektoren ab.*

Beweis.
Seien $\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}$ linear abhängige Vektoren von VR V über K, so existieren Skalare $\lambda_i \in K$, $i = 1, ...k$, die nicht alle verschwinden, sodass

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{0}$$

Somit folgt

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(\vec{a_i}) = \sigma(\vec{0}) = \vec{0}$$

□

Beispiel.

$$V = \mathbb{R}^n, \quad V' = \mathbb{R}$$

$$\sigma(\vec{x}) = |\vec{x}| \quad \text{ist keine lineare Abbildung!}$$

$$\sigma(\vec{x} + \vec{y}) = \underbrace{|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|}_{\text{Dreiecksungleichung}} = \sigma(\vec{x}) + \sigma(\vec{y})$$

$$\sigma(\lambda\vec{x}) = |\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}| = |\lambda|\sigma(\vec{x})$$

Definition.

$$L(V,V') = \{\sigma | V \to V'\}$$

ist die Menge aller linearen Abbildungen von V nach V'

Definition. $\sigma \in L(V,V')$ heißt injektiv wenn für $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$ gilt,

$$\sigma(\vec{v_1}) = \sigma(\vec{v_2}) \Rightarrow \vec{v_1} = \vec{v_2}$$

Definition. σ heißt surjektiv, wenn $\sigma(V) = V'$

Definition. σ heißt bijektiv (oder Isomorphismus) wenn σ injektiv und surjektiv.

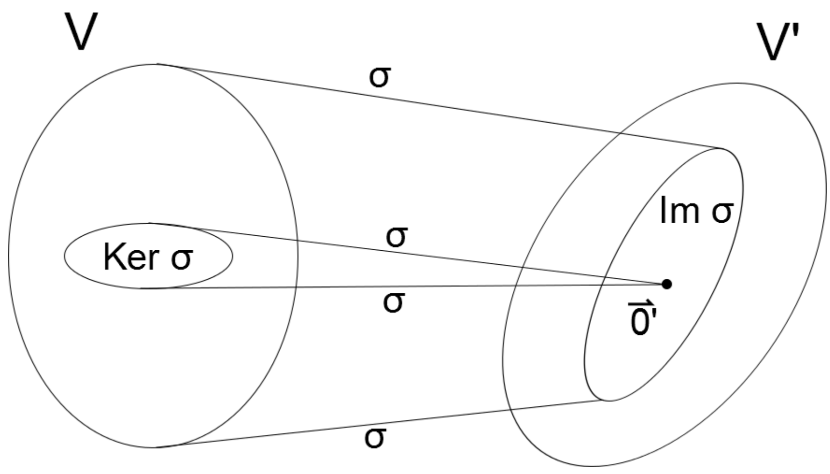
Definition. V heißt isomorph zu $V' : V \cong V'$ wenn $\exists$ bijektives $\sigma \in L(V,V')$

Definition. Ein Isomorphismus eines Vektorraums V auf sich selbst heißt Automorphismus.

Satz. *$V \cong V'$ (isomorph) genau dann, wenn* $\dim V = \dim V'$.
(ohne Beweis)

Definition.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\sigma &= \{\vec{x} | \vec{x} \in V \text{ mit } \sigma(\vec{x}) = \vec{0'} \in V'\} \\ \operatorname{Im}\sigma &= \{\sigma(\vec{x}) | \vec{x} \in V\} \end{aligned}$$



Satz. *Für $\sigma \in L(V,V')$ gilt*

$$\dim(Ker\,\sigma) + \dim(Im\,\sigma) = \dim V$$

(ohne Beweis)

Beispiel.

$$V = \mathbb{R}^n \quad V' = \mathbb{R}^m \quad m < n$$

Für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \\ x_{m+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

sei

$$\sigma(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \sigma = m$$

$$\operatorname{Ker} \sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-m} \end{pmatrix} \middle| y_i \in K \right\}$$

$$\dim \operatorname{Ker} \sigma = n - m \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \sigma + \dim \operatorname{Im} \sigma = n$$

Satz. *$\sigma \in L(V, V')$ ist genau dann injektiv, wenn $Ker \sigma = \left\{ \vec{0} \right\}$.*

Beweis.

- sei $\sigma \in L(V, V')$ injektiv. Für jedes $\vec{v} \in \operatorname{Ker} \sigma$ gilt $\sigma(\vec{v}) = \vec{0}' = \sigma(\vec{0})$. Mit Injektivität folgt $\vec{v} = \vec{0}$.
- sei $\operatorname{Ker} \sigma = \vec{0}$. Ist nun für $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$ $\sigma(\vec{v_1}) = \sigma(\vec{v_2})$, so folgt $\sigma(\vec{v_1} - \vec{v_2}) = \vec{0}'$, also $\vec{v_1} - \vec{v_2} \in \operatorname{Ker} \sigma = \vec{0}$, also $\vec{v_1} = \vec{v_2}$.

□

Satz. *Eine injektive lineare Abbildung führt linear unabhängige Vektoren in linear unabhängige Vektoren über (ohne Beweis, siehe Übungen).*

Können wir die Menge der $\sigma \in L(V, V')$ zu einem Vektorraum erweitern?

Satz. *Seien $\sigma, \tau \in L(V, V')$. Dann bildet $L(V, V')$ mit*

$$\begin{aligned} (\sigma + \tau)(\vec{x}) &= \sigma(\vec{x}) + \tau(\vec{x}) \\ (\lambda\sigma)(\vec{x}) &= \lambda\sigma(\vec{x}) \quad \lambda \in K \end{aligned}$$

einen Vektorraum $(L(V, V'), +)$ über K.

Definition. Der Dualraum V^* eines Vektorraumes V über einen Körper K ist der VR $(L(V, K), +)$ aller linearen Abbildungen von V nach K.

$$V^* = (L(V, K), +)$$

Bemerkung. Jedes Element aus V^* ist eine lineare Abbildung von V nach K und wird *lineares Funktional* genannt.

Beispiel.

$$V = \mathbb{R}^n, \quad K = \mathbb{R},\ \sigma(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}, \quad \vec{a} \text{ fest}$$

Satz. *Für lineare Abbildungen können wir neben „Addition“ + auch eine zusätzliche Verknüpfung* „Hintereinanderausführung“ *(oder* „Multiplikation“*) o definieren: Sei $\sigma \in L(V, V')$, $\quad \tau \in L(V', V'')$.*

$$\tau \ o \ \sigma : V \to V''$$

$$(\tau \ o\ \sigma)(\vec{x}) = \tau(\sigma(\vec{x})), \quad \vec{x} \in V$$

Es gilt $\tau \ o\ \sigma \in L(V, V'')$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(\tau \text{ o } \sigma)(a\vec{x} + b\vec{x}) &= \tau(\sigma(a\vec{x} + b\vec{x})) \\
&= \tau(a\sigma(\vec{x}) + b\sigma(\vec{x})) \\
&= a\tau(\sigma(\vec{x})) + b\tau(\sigma(\vec{x})) \\
&= a(\tau \text{ o } \sigma)(\vec{x}) + b(\tau \text{ o } \sigma)(\vec{x})
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Betrachten wir $(L(V, V), \text{ o })$, bildet dies im Allgemeinen keine Gruppe. Die Hintereinanderausführung ist im Allgemeinen nicht kommutativ, es gibt die Einheit (diese ist die identische Abbildung $\mathbf{1}(\vec{x}) = \vec{x}$) und es gilt das Assoziativgesetz $\rho \circ (\tau \circ \sigma) = (\rho \circ \tau) \circ \sigma$

$$(\rho \circ (\tau \circ \sigma))(\vec{x}) = \rho((\tau \circ \sigma)(\vec{x})) = \rho(\tau(\sigma(\vec{x})))$$

$$((\rho \circ \tau) \circ \sigma)(\vec{x}) = (\rho \circ \tau)(\sigma(\vec{x})) = \rho(\tau(\sigma(\vec{x})))$$

Es existiert jedoch nicht immer das Inverse (nur bijektive Abbildungen sind umkehrbar). Diese algebraische Struktur nennen wir eine (nicht kommutative) Halbgruppe.

Bemerkung. Betrachten wir $(L(V, V), +, \text{ o })$ so liegt bezüglich + eine Gruppe vor, bezüglich o eine (nicht kommutative) Halbgruppe, sowie sind die Distributivgesetze erfüllt, dies bezeichnen wir als Ring.

Bemerkung. Die Automorphismen eines n-dimensionalen VR V über K bilden hingegen sehr wohl eine (nicht kommutative) Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung o , diese Gruppe bezeichnen wir als $GL(n, K)$, wobei GL für general linear steht.

3.3 Matrizen

Satz. *Sei $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ eine Basis des VR V. Dann ist jede lineare Abbildung $\sigma \in L(V, V')$ bereits nur durch die Angabe der Abbildung der Basis $\sigma(\vec{b_i}) = \vec{c_i}$ festgelegt.*

Beweis.

$$\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = x_i\vec{b_i}$$

$$\sigma(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\sigma(\vec{b_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{c_i}$$

□

Bemerkung. Die Basisbilder $\vec{c_i} = \sigma(\vec{b_i})$ können beliebig gewählt werden und bilden im Allgemeinen keine Basis von V'.

Satz. *Jede lineare Abbildung* $\sigma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *wird durch das Skalarprodukt von* $\vec{x}$ *mit einem Vektor* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ *gegeben.*

$$\sigma(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

Beweis. Wir betrachten als Basis im $\mathbb{R}^n$

$$\vec{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Zeile}, i = 1, 2, ..n$$

Sei $\sigma(\vec{e_i}) = a_i \in \mathbb{R}$.

$$\sigma(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \vec{a}\vec{x}$$

□

Satz. *Jede lineare Abbildung* $\sigma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *wird durch das Produkt von* $\vec{x}$ *mit einem rechteckigen Zahlenschema, der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben.

Beweis. Sei

$$\sigma(\vec{e_i}) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ ... \\ a_{m_i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{x}) &= \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ ... \\ a_{mi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ ... \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Wir sagen A hat m Zeilen und n Spalten, wir schreiben $A = (a_{ij})$.

Analog fassen wir in Matrixnotation die Vektorkomponenten als $n \times 1$ Matrix X auf

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

und schreiben somit

$$\sigma(\vec{x}) = A\,X$$

Satz. *Zweifache Basisabhängigkeit einer Matrix*

Seien im Allgemeinen V, V' VR über K, $\dim V = n$, $\dim V' = m$ mit Basen $B = \{\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}\}$ und $B' = \{\vec{b'_1}, ..., \vec{b'_m}\}$. Es gibt eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $L(V, V')$ auf die Menge der $m \times n$ Matrizen über K, die von den in V, V' gewählten Basen B und B' abhängt.

$$\sigma \Leftrightarrow A$$

Beweis.
$\Rightarrow$ Sei $\sigma(\vec{b_j}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{b'_i}$, wo a_{ij} eindeutig sind, wegen der Eindeutigkeit bei Entwicklung nach einer Basis. Damit definieren wir $A = (a_{ij})$.

$\Leftarrow$ Sei $A = (a_{ij})$ gegeben, dann definieren wir $\sigma(\vec{b_j}) := \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{b'_i}$, damit ist σ vollständig bestimmt. □

Definition. Addition von Matritzen
Seien $\sigma, \tau \in L(V, V')$, $\dim V = n$, $\quad \dim V' = m$.

Sei

$$\begin{aligned} \sigma \in L(V, V'):\ \sigma(\vec{b_j}) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{b_i}' \\ \tau \in L(V, V''):\ \tau(\vec{b_j}) &= \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\vec{b_i}' \end{aligned}$$

$$\sigma\ + \tau \text{ ordnen wir } A + B \text{ zu}$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma + \tau)(\vec{b_j}) &= \sigma(\vec{b_j}) + \tau(\vec{b_j}) = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij} + b_{ij})\vec{b_i}' \\
A + B &= (a_{ij} + b_{ij})
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Achtung nicht verwechseln: $\vec{b_i}$ ... Basis von V, $\vec{b_i}'$ ... Basis von V', b_{ij} ... Komponenten der Matrix B.

Definition. Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar:
Sei $\lambda \in K$ und $\lambda\sigma$ ordnen wir λA zu:

$$
\begin{aligned}
(\lambda\sigma)(\vec{b_j}) &= \lambda\sigma(\vec{b_j}) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{b_i}' \\
\lambda A &= (\lambda a_{ij})
\end{aligned}
$$

Definition. Multiplikation von Matritzen
Sei

$$
\begin{aligned}
\sigma \in L(V, V') : \ \sigma(\vec{b_j}) &= \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\vec{b_k}' \\
\tau \in L(V', V'') : \ \tau(\vec{b_k}') &= \sum_{i=1}^{r} a_{ik}\vec{b_i}''
\end{aligned}
$$

$\tau \circ \sigma$ ordnen wir $A \cdot B$ zu

$$
\begin{aligned}
(\tau \circ \sigma)(\vec{b_j}) &= \tau(\sigma(\vec{b_j})) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\tau(\vec{b_k}') \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r} b_{kj}a_{ik}\vec{b_i}'' \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\vec{b_i}'' \\
&= \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\vec{b_i}''
\end{aligned}
$$

Unter dem Produkt der Matrizen $A \cdot B = C$ versteht man die Matrix $C = (c_{ij})$ mit Elementen

$$
c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}
$$

(Skalarprodukt von i-ter Zeile von A mit j-ter Spalte von B.

Beispiel. Spiegelung an x-Achse im $\mathbb{R}^2$, betrachten die spezielle Basis $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eine Spiegelung der Einheitsvektoren an der x-Achse liefert

$$
\vec{e}_1 \to \vec{e}_1, \ \vec{e}_2 \to -\vec{e}_2
$$

sodass mit

$$\sigma(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die der Spiegelung zugegeordnete Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Spiegelung wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \vec{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \sigma(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zweifache Spiegelung wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \vec{x'} &= \sigma(\sigma(\vec{x})) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Achtung! Im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$. **Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ**, z.B.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Produkt zweier Matrizen A, B ist **nur** definiert, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist.

$$A_{n\times m} \cdot B_{m\times k} = C_{n\times k}$$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Beispiel. Ein weiteres Beispiel für Matrizenprodukt ist die Matrixschreibweise von linearen Abbildungen

$$\sigma(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = A\,X$$

Definition. transponierte Matrix A^T

$$\begin{aligned} A^T &= (a_{ij}^T) = (a_{ji}) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{n1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1m} & ... & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= A^T + B^T \\ (\lambda A)^T &= \lambda A^T \\ (AB)^T &= B^T A^T \end{aligned}$$

Definition. Hermitisch konjugierte Matrix $A^\dagger$

$$A^\dagger = (A^T)^* = (a_{ij}^T)^* = (a_{ji}^*)$$

$\equiv$ transponierte und komplex konjugierte Matrix
Es gilt

$$\begin{aligned} (A+B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger \\ (\lambda A)^\dagger &= \lambda^* A^\dagger \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger \end{aligned}$$

Definition. Eine quadratische Matrix A heißt

- symmetrisch wenn $A = A^T$.
- antisymmetrisch wenn $A = -A^T$
- hermitisch wenn $A = A^\dagger$
- antihermitisch wenn $A = -A^\dagger$
- normal wenn $AA^\dagger = A^\dagger A$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist hermitisch}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger = (A^T)^* = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = A$$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist normal}$$

$$
\begin{aligned}
AA^T &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\
A^T A &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.4 Determinanten

Man kann jeder **quadratischen** Matrix über K eine Zahl aus K zuordnen, die Determinante

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} ... \sum_{i_n=1}^{n} \epsilon_{i_1 i_2 ... i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n} \\
&= \epsilon_{i_1 ... i_n} a_{i_1 1} ... a_{i_n n}
\end{aligned}
$$

dabei wurde Summenkonvention (über doppelt vorkommende Indices wird summiert) verwendet . Als Verallgemeinerung von ϵ_{ijk} definieren wir

- $\epsilon_{1\,2...n} = 1$
- $\epsilon_{i_1...i_n} = +1$ wenn $(i_1...i_n)$ durch gerade Zahl von paarweisen Vertauschungen auf $(1, 2, ..., n)$ gebraucht werden kann.
- $= -1$ durch ungerade Anzahl von Vertauschungen auf $(1, 2, ..., n)$
- $= 0$ wenn nicht alle Indizes verschieden.

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \epsilon_{i_1\, i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \\
&= \underbrace{\epsilon_{11}}_{=0} a_{11} a_{12} + \underbrace{\epsilon_{12}}_{=1} a_{11} a_{22} + \underbrace{\epsilon_{21}}_{=-1} a_{21} a_{12} + \underbrace{\epsilon_{22}}_{=0} a_{21} a_{22} \\
&= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}
\end{aligned}
$$

Beispiel.

$$
\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-6) = 8
$$

Bemerkung. $\det A$ kann aufgefasst werden als Funktion von Spaltenvektoren $\vec{a_k}$ mit Komponenten

$$
(\vec{a_k})_i = a_{ik}
$$

Neue Schreibweise

$$
\det A = \epsilon_{i_1...i_n} (\vec{a_1})_{i_1} (\vec{a_2})_{i_2} ... (\vec{a_n})_{i_n} := [\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}]
$$

3.4.1 Sätze über Determinanten

1. $\det A = \det A^T$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\det A^T &= \epsilon_{i_1 \dots i_n} a^T_{i_1 1} \dots a^T_{i_n n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n} \underbrace{a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}}_{\text{umreihen durch m-Vertauschungen}} \\
&= \epsilon_{i_1 \dots i_n} a_{j_1 1} \dots a_{j_n n} \qquad \text{j's hängen von i's ab}
\end{aligned}$$

Nach m Vertauschungen der a's sind gleichzeitig

$$\begin{aligned}
(i_1, i_2, ..., i_n) &\to (1, 2, ..., n) \\
(1, 2, ..., n) &\to (j_1, j_2, ..., j_n)
\end{aligned}$$

also $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \epsilon_{j_1 \dots j_n}$ und $\det A^T = \epsilon_{j_1 \dots j_n} a_{j_1 1} \dots a_{j_n n} = \det A$

$\square$

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \qquad \begin{vmatrix} 13 \\ -22 \end{vmatrix} = 8$$

2. $[\vec{a_1}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_k}, ...\vec{a_n}] = -[\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}]$
   Die Determinante ändert das Vorzeichen, wenn man zwei Spalten (zwei Zeilen) vertauscht.

   Beweis.

$$\begin{aligned}
\epsilon_{i_1 \dots i_l \dots i_k \dots i_n} (\vec{a_1})_{i1} \dots (\vec{a_l})_{il} \dots (\vec{a_k})_{ik} \dots (\vec{a_n})_{in} &= -\epsilon_{i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_n} (\vec{a_1})_{i1} \dots (\vec{a_l})_{il} \dots (\vec{a_k})_{ik} \dots (\vec{a_n})_{in} \\
&= -\epsilon_{i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_n} (\vec{a_1})_{i1} \dots (\vec{a_k})_{ik} \dots (\vec{a_l})_{il} \dots (\vec{a_n})_{in} \\
&= -[\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}]
\end{aligned}$$

$\square$

3. $[\vec{a_1}, ..., \lambda\vec{a_k}, ..., \vec{a_n}] = \lambda[\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n}] = \lambda \det A$
4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ folgt aus 3.
5. $[\vec{a_1}, ..., \vec{a_k} + \vec{b_k}, ..., \vec{a_n}] = [\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n}] + [\vec{a_1}, ..., \vec{b_k}, ..., \vec{a_n}]$

   Achtung vor Trugschluß

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B$$

6. $\det \mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix} = [\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}] = 1$

   Beweis.

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} (\vec{e_1})_{i_1} \dots (\vec{e_n})_{i_n} = \epsilon_{1 \dots n} = 1$$

$\square$

7. $[\vec{a_{k_1}}, \vec{a_{k_2}}, ..., \vec{a_{k_n}}] = \epsilon_{k_1...k_n}[\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}]$

Beweis.

$$\epsilon_{i_1...i_n}(\vec{a_{k_1}})_{i1}(\vec{a_{k_n}})_{in} = \epsilon_{i_1...i_n}(\vec{a_1})_{\gamma_1}...(\vec{a_n})_{\gamma_n}$$

$(k_1, ..., k_n) \rightarrow (1, 2, ..., n)$ durch eine gewisse Zahl m von Vertauschungen, ebenso $(i_1, ..., i_n) \rightarrow (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ damit $\epsilon_{i_1...i_n} = \epsilon_{k_1...k_n}\epsilon_{\gamma_1...\gamma_n}$

□

8. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\det(A \cdot B) &= \epsilon_{i_1...i_n}(A \cdot B)_{1i_1}(A \cdot B)_{2i_2}...(A \cdot B)_{ni_n} \\
&= \epsilon_{i_1...i_n}a_{1j_1}b_{j_1i_1}a_{2j_2}b_{j_2i_2}...a_{nj_n}b_{j_ni_n} \\
&= a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}\epsilon_{i_1...i_n}b_{j_1i_1}b_{j_2i_2}...b_{j_ni_n} \\
&= \det A \cdot \det B
\end{aligned}$$

□

9. $\det A = 0 \Leftrightarrow$ Spalten (Zeilen) Vektoren sind linear abhängig.

   (a) $\Leftarrow$ wenn Spalten (Zeilen)vektoren linear abhängig, so ist zumindest eine Spalte Linearkombination der anderen. dh. mindestens 2 Spalten sind (bis auf Vorfaktor) gleich und somit $\det A = 0$.

   (b) $\Rightarrow$ Sei $\det A = 0$ und seien $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ linear unabhängig, wir zeigen dass ein Widerspruch ensteht. Wegen der linearen Unabhängigkeit $\rightarrow \vec{e_i} = \lambda_{ki}\vec{a_k}$.

$$1 = [\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}] = \lambda_{k_1 1}...\lambda_{k_n n}[\vec{a_{k_1}}, ..., \vec{a_{k_n}}] = 0$$

10. **Entwicklungssatz**

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det A_{ik}$$

(Entwicklung nach der k-ten Spalte)

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det A_{ik}$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile)

A_{ik} erhält man aus A durch wegstreichen der $i - ten$ Zeile und $k - ten$ Spalte.

Beispiel.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 6 & 2 & -1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -4 + 3 - 6 = -7$$

Probe: Entwicklung nach dritter Zeile

$$6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 1 = -7$$

Beweis. Trick: $\vec{a_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{e_i}$

$$[\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n}] = \sum_{i=1}^{n} [\vec{a_1}, ..., a_{ik}\vec{e_i}, ..., \vec{a_n}]$$

$$[\vec{a_1}, ..., \vec{e_i}, ..., \vec{a_n}] = \det \begin{pmatrix} & A_{ik} & & 0 \\ & & & ... \\ a_{i_1} & ... & a_{i_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} (-1)^{-n+k+n+i} = (-1)^{k+1} \det A_{ik}$$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}$$

$$\det \begin{pmatrix} X & 0 \\ y_1 ... y_{n-1} & 1 \end{pmatrix} = \epsilon_{i_1 ... i_{n-1} i_n} \begin{pmatrix} \vec{x_1} \\ y_1 \end{pmatrix}_{i_1} ... \begin{pmatrix} \vec{x_{n-1}} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}_{i_{n-1}} = \underbrace{(\vec{e_n})_{i_n}}_{\delta_{n i_n}}$$

da

$$(i_1 \neq i_2 \neq ... \neq n) = \epsilon_{i_1 ... i_{n-1}} (\vec{x_1})_{i_1} ... (\vec{x_n})_{i_{n-1}} = \det X$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} \quad \text{Entwicklung nach kter Spalte}$$

□

Definition. Zeilen (Spalten)rang
Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen- (Spalten) vektoren einer Matrix heißt Zeilen (Spalten)rang.

Satz. *Zeilenrang = Spaltenrang (=Rang)*

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Zeilenrang:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig, daher Zeilenrang = 2.

Spaltenrang:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig, daher Spaltenrang = 2.

Bemerkung.
$$\text{Rang } A = \dim(\text{Im}\sigma)$$

da $\sigma(\vec{e_j}) = \vec{a_j} \in \mathbb{R}^m$

Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von $A = \dim \text{Im}\sigma$.

Definition. Durch Streichen von Zeichen und Spalten lassen sich aus einer $n \times m$ Matrix quadratische $k \times k$ Matrizen bilden. ($k \leq \min(m, n)$). Die zugehörigen Determinanten heißen Unterdeterminanten.

Satz. *Der Rang r einer $n \times m$ Matrix A ist gleich der größten Zahl s, für die es eine nichtverschwindende $s \times s$ Unterdeterminante gibt.*

Beispiel.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A ... 2 \times 3 \text{Matrix}$$

da
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r = \text{Rang } A = 2$$

Beispiel.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\det A = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 ...$$

$A ... 3 \times 3$ Matrix, $r = 2$.

3.4.2 Matrixinvertierung

Satz. *Sei $\sigma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Es existiert σ^{-1} genau dann, wenn σ bijektiv, also muss $n = m$ und $\dim Im\sigma = n$ sein, dh. Rang $A = n$, bzw. $\det A \neq 0$.*

$$\sigma^{-1} \textit{ ordnen wir } A^{-1} \textit{ zu}$$

Rang $A^{-1} = n$ (analog)

Satz. *Zu $n \times n$ Matrix A existiert A^{-1} mit $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$, wenn $\det A \neq 0$.*

Beweis. $\Rightarrow$ wenn ein σ^{-1} existiert, so ist $\det A \neq 0$
$\Leftarrow$ sei $\det A \neq 0$

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\frac{\det A_{ik}}{\det A} \quad \text{vgl. Entw. n. k-ter Spalte} \\
0 &= [\vec{a_1},...,\vec{a_k},....,\vec{a_k},...,\vec{a_n}] = \quad \text{entw. n. j-ter Spalte} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\tilde{a_{ij}}\underbrace{\det\tilde{A_{ij}}}_{\det A_{ij}} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ik}\det A_{ij} = 0
\end{aligned}
$$

Wir erhalten

$$
\rightarrow \delta_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{(-1)^{i+j}\frac{\det A_{ij}}{\det A}}_{a_{ji}^{-1}}a_{ik}
$$

somit

$$
a_{ji}^{-1} = (-1)^{i+j}\frac{\det A_{ij}}{\det A}
$$

$$
\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^{-1}a_{ik} = \delta_{jk} \quad A^{-1}A = \mathbf{1}
$$

$\square$

Beispiel.

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\det A &= 2 \\
\det A_{11} &= 2 \\
\det A_{12} &= 0 \\
\det A_{21} &= -1 \\
\det A_{21} &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{-1} &= \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \\
a_{12}^{-1} &= \frac{1}{2}(-1)^{1+2}(-1) = \frac{1}{2} \\
a_{21}^{-1} &= \frac{1}{2}(-1)^{1+2}\cdot 0 = 0 \\
a_{22}^{-1} &= \frac{1}{2}1 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

Satz.

$$
\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}
$$

Definition. Eine quadratische Matrix A heißt

- orthogonal wenn $A^T = A^{-1}$ oder gleichbedeutend $A^T A = AA^T = 1$
- unitär wenn $A^\dagger = A^{-1}$ oder gleichbedeutend $A^\dagger A = AA^\dagger = 1$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist hermitisch } A = A^\dagger$$

und auch unitär

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Basiswechsel

Ein Basiswechsel $B = \{\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}\} \rightarrow B' = \{\vec{b'_1}, ..., \vec{b'_n}\}$ (beachte die Zahl n der Basiselemente bleibt gleich) wird durch eine invertierbare Matrix $S = (s_{ij})$ definiert:

$$\vec{b'_j} = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \vec{b_i}$$

Vektor bleibt bei Basiswechsel unverändert, nur seine Komponenten ändern sich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{b_i} &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \vec{b'_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x'_j s_{ij} \vec{b_i} \end{aligned}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j s_{ij} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x'_j$$

In Matrixnotation

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

schreiben wir die Transformationsformel $x_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x'_j$ als

$$X = SX'$$

bzw. nach linksseitigem Multiplizieren mit S^{-1}

$$X' = S^{-1} X$$

Nun betrachten wir die Änderung einer Matrix bei Basiswechsel: Ausgangspunkt ist

$$Y = AX$$

Nach dem Basiswechsel gilt

$$\begin{aligned} Y' &= S^{-1}Y = S^{-1}AX \\ &= \underbrace{S^{-1}AS}_{:=A'}X' \end{aligned}$$

$$A' = S^{-1}AS$$

3.5 Lineare Gleichungssysteme

A heißt Matrix des linearen Gleichungssystems $A\,X = B$ oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ ... &= ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Gesucht: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

3.5.1 homogenes lineares Gleichungssystem

$$A\,X = 0$$

entspricht einer linearen Abbildung $\sigma(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \sigma \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. $\vec{x}$ ist Lösung des Gleichungssystems, wenn $\vec{x} \in \operatorname{Ker}\sigma$.

Satz. *Homogenes lineares Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung $X = 0$ (d.h. $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$).*

Beweis.

$$\vec{0} \in \mathrm{Ker}\sigma$$

□

Satz. *homogenes lineares Gleichungssystem $A\,X = 0$ mit $n \times m$ Matrix A hat **nur** die triviale Lösung $X = 0$, wenn Rang $A = n$.*

Beweis.

$$\mathrm{Ker}\sigma = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\sigma = 0 \Leftrightarrow n = \dim \mathbb{R}^n = \underbrace{\dim \mathrm{Im}\sigma}_{\text{Rang } A}$$

□

Satz. *Allgemeine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $A\,X = 0$ mit $m \times n$ Matrix A von Rang r ist ein Vektorraum mit Dimension $n - r$.*

Beweis.

$$\dim \mathrm{Ker}\sigma = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathrm{Im}\sigma = n - r$$

□

Somit ist die allgemeine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $A\,X = 0$ mit $m \times n$ Matrix A von Rang r

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + ... + \lambda_{n-r} \vec{x}_{n-r}$$

wo $\vec{x_i}$ linear unabhängige Lösungsvektoren sind.

Satz. *Für $\sigma \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ hat das homogene lineare Gleichungssystems $A\,X = 0$ mit quadratischer $n \times n$ Matrix A genau dann eine Lösung $X \neq 0$, wenn $\det A = 0$ (Beweis analog wie oben).*

Beispiel.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \qquad m = n = 3 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= +1 + 2 = +3 \end{aligned}$$

$$r = 3, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{eindeutig}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \qquad m = n = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow det\,A = 0,\ r = 1, \qquad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.5.1.1 Eliminationsverfahren

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= 0 \\ ... &= 0 \\ a_{r1}x_1 + ... + a_{rn}x_n &= 0 \\ a_{(r+1)1}x_1 + ... + a_{(r+1)n}x_n &= 0 \\ ... &= 0 \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir eine solche Indizierung, dass die ersten r Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Die restlichen Gleichungen (mit Index $> r$) können wir vernachlässigen.

Behauptung. *Jede Lösung* $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$*, die die ersten r linear unabhängigen Gleichungen befriedigt, erfüllt auch die weiteren Gleichungen. Es genügt daher die ersten r linear unabhängigen Gleichungen zu lösen, die anderen Gleichungen sind Folgerelationen.*

Durch schrittweise Umformung erhalten wir (beachte dass $a_{11} \neq 0$, ..., $k_{rr} \neq 0$)

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & ... & + & a_{1r}x_r & = & -a_{1(r+1)}x_{r+1} & + & ... & + & -a_{1n}x_n \\ & & ... & & & = & & & ... & & \\ & & & & k_{rr}x_r & = & -k_{r(r+1)}x_{r+1} & + & ... & + & -k_{rn}x_n \end{array}$$

Man gewinnt $n - r$ linear unabhängige Lösungen aus der Vorgabe von jeweils

x_{r+1}	x_{r+2}	...	x_n
1	0	...	0
0	1	...	0
...	...	...	...
0	0	...	1

Die Allgemeine Lösung lautet $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + ... + \lambda_{m-r} \vec{x_{m-r}}$

Beispiel.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \quad (I) \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \quad (II) \\ +2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \quad (III) \end{aligned}$$

$r = 1 \Rightarrow 3 - 1 = 2$ linear unabhängige Lösungen.

$$(I) \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

x_2	x_3
0	1
1	0

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.5.2 inhomogenes lineares Gleichungssystem

$$A\,X = B$$

Lösbarkeitskriterium Das inhomogene lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

den gleichen Rang haben.

Satz. *Die Gesamtlösung eines lösbaren inhomogenen Gleichungssystems $A\,X = B$ ist die Summe von einer speziellen Lösung und der allgemeinen homogenen Lösungen*

$$x = x_{sp} + x_{allg.hom}$$

Beweis. Sei $AX_1 = B$ und $AX_2 = B$.

$$\Rightarrow A(X_2 - X_1) = 0 \quad \Rightarrow X_2 - X_1 = X_{hom}$$

$$X_2 = X_1 + X_{hom} \Rightarrow$$

Wenn Rang $A = r = r' < n$: Bestimmung einer speziellen Lösung mit Eliminationsverfahren für inhomogenes Gleichungssystem, wo man schlußendlich $x_{r+1} = ... = x_n = 0$ setzt. □

Beispiel.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$r = r' = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = +1 - x_2 - x_3 \quad \text{spezielle Lösung:} x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei nun Rang $A = n$:

Satz. *Für quadratische $n \times n$ Matrix A mit $r = r' = n$ folgt aus*

$$AX = B$$

dass

$$X = A^{-1}B$$

Durch Umschreiben mittels der Formel für die Inverse Matrix A erhalten wir die ***Kramersche Regel***

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ ... & & & & \\ a_{n1} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{det\, A}$$

wobei die b's in der j-ten Spalte stehen.

3.6 Euklidische und unitäre Räume

Wir bezeichnen nunmehr Elemente eines Vektorraums V mit Symbolen x oder y ohne Hinzufügen von Vektorpfeilen, um der allgemein abstrakteren Sachlage gerecht zu werden.

Ebenso wollen wir lineare Abbildungen von Vektorräumen anstatt in der früheren Notation

$$\sigma : V \to V' \quad \vec{x} \to \sigma(\vec{x})$$

nun mittels **linearer Operatoren** T schreiben

$$T : V \to V' \quad x \to Tx$$

Linearität lautet in dieser Notation $T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$.

Definition. Ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$ heißt euklidisch, wenn ein Skalarprodukt $V \times V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften definiert ist:

1. $(x|y) = (y|x)$
2. $(x|\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x|y_1) + \mu(x|y_2)$
3. $(x|x) \geq 0, (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Definition. Ein Vektorraum V über $\mathbb{C}$ heißt unitär, wenn ein Skalarprodukt $V \times V \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften definiert ist:

1. $(x|y) = (y|x)^*$
2. $(x|\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x|y_1) + \mu(x|y_2)$
3. $(x|x) \geq 0, (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Beispiel. $V = \mathbb{C}^n$ mit

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^* y_i \in \mathbb{C}$$

ist n-dimensionaler unitärer Raum.

Beispiel. Funktionenraum $\mathbb{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ (Menge der stetigen komplexwertigen Funktionen auf reellem Intervall $[a, b]$) ist mit

$$(f|g) = \int_a^b f^*(x)g(x)dx \in \mathbb{C}$$

ein (unendlich dimensionaler) unitärer Raum.

Definition. Norm

Eine Norm ist eine Abbildung von einem Vektorraum V über dem Körper K der reellen oder der komplexen Zahlen in die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen,

1. $||x|| \geq 0 \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x|| \quad \lambda \in K$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Wir wollen im Folgenden nur endlich dimensionale euklidische bzw. unitäre Räume betrachten.

Satz. *Sei x Element eines euklidischen oder unitären Raumes. Dann ist*

$$||x|| = \sqrt{(x|x)}$$

eine Norm.

Definition. Seien x, y aus euklidischem oder unitärem Raum. x heißt **orthogonal** zu y, wenn

$$(x|y) = 0$$

Definition. Ein **Orthonormalsystem** ist eine Menge von Elementen eines euklidischen oder unitären Raumes, welche orthogonal aufeinander stehen und auf 1 normiert sind.

Definition. Eine **Orthonormalbasis** ist eine Basis, die zugleich ein Orthonormalsystem ist. Wir wollen Orthonormalbasen mit den Buchstaben e_i bezeichnen:

$$\{e_1 ... e_n\} \text{ Basis mit } (e_i|e_j) = \delta_{ij}$$

Satz. *(Gram-Schmidt)*
Jede linear unabhängige Menge von Vektoren aus euklidischem oder unitärem Raum kann durch eine geeignete Linearkombination in ein Orthonormalsystem überführt werden. Insbesondere kann jede Basis b_i durch Linearkombination in eine orthonormale Basis e_i umgeformt werden.

Beweis. $(b_1 ... b_n)$ sei eine Basis eines unitären Raumes.

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{b_1}{||b_1||} \\ e_2 &= \frac{b_2 - e_1(e_1|b_2)}{||b_2 - e_1(e_1|b_2)||} \\ &... \end{aligned}$$

und tatsächlich ist z.B.

$$(e_1|e_2) = \frac{(e_1|b_2) - 1 \cdot (e_1|b_2)}{||b_2 - e_1(e_1|b_2)||} = 0$$

$\square$

Definition. adjungierter Operator $T^\dagger$

Sei $T : V \to V$ linearer Operator in unitärem VR. Der adjungierte Operator $T^\dagger$ ist definiert durch

$$(y|Tx) = (T^\dagger y|x)$$

Wir können zeigen, dass dem Operator $T^\dagger$ die Matrix $A^\dagger = A^{T^*}$ zugeordnet ist, wenn T die Matrix A zugeordnet ist.

Beweis. Sei $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i$ und $V = \mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned}(y|Tx) &= \sum_{i=1}^n y_i^* \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \\ &= \sum_{k=1}^n y_k^* \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^n a_{ki}^* y_k)^* x_i \\ &= (T^\dagger y|x)\end{aligned}$$

Somt lesen wir die dem Operator $T^\dagger$ zugeordnete Matrix $A^\dagger$ ab:

$$A = (a_{ik}), \quad A^\dagger = A^{T^*} = (a_{ki}^*)$$

$\square$

Bemerkung.

- T hermitescher Operator eines unitären VR, wenn $T = T^\dagger$
- T unitärer Operator eines unitären VR, wenn $T^\dagger T = T\,T^\dagger$ =1
- T normaler Operator eines unitären VR, wenn $T^\dagger T = T\,T^\dagger$

3.7 Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung

Definition. Eigenwert, Eigenvektor, Spektrum

Sei $T : V \to V$ linearer Operator in unitärem VR, $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert des linearen Operators T sowie $x \in V$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ, wenn

$$Tx = \lambda x$$

Hier gilt $x \neq 0$, sodass die Normierung ||x||=1 gewählt werden kann. Die Menge aller Eigenwerte eines linearen Operators T heisst das Spektrum von T.

In Bezug auf die dem linearen Operator T zugeordnete Matrix A definieren wir die Gleichung für die Eigenvektoren

$$AX = \lambda X$$

Satz. *Die Eigenwerte von A sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms*

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{1} - A)$$

bestimmt und zu jedem Eigenwert gibt es (wenigstens) einen Eigenvektor.

Beweis. Sei $X \neq 0$ und $AX = \lambda X$

$$\Rightarrow (\lambda\mathbf{1} - A)X = 0$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem. Es besitzt genau dann eine Lösung $X \neq 0$, wenn

$$\det(\lambda\mathbf{1} - A) = 0$$

$\det(\lambda\mathbf{1} - A)$ ist ein Polynom in λ und es existiert immer eine Nullstelle λ_0 (oder mehrere) in $\mathbb{C}$. □

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda\mathbf{1} - A) \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Es liegt ein Eigenwert $\lambda = 1$ mit Vielfachheit 2 vor, ausgehend von $(\lambda\mathbf{1} - A)X = 0$ studieren wir die Lösung der Eigenvektor Gleichung

$$\left[1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir $y = 0$, jedoch ist x beliebig, der normierte Eigenvektor lautet somit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir überprüfen unser Ergebnis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Satz. *Sei T normaler Operator eines unitären VR (das heisst $T^\dagger T = T T^\dagger$), $x \neq 0$ Eigenvektor mit Eigenwert λ, $Tx = \lambda x$. Dann gilt $T^\dagger x = \lambda^* x$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} Tx = \lambda x \Leftrightarrow 0 &= ||(T - \lambda\mathbf{1})x||^2 \\ &= ((T - \lambda\mathbf{1})x|(T - \lambda\mathbf{1})x) = ((T^\dagger - \lambda^*\mathbf{1})(T - \lambda\mathbf{1})x|x) \\ &= ((T - \lambda\mathbf{1})(T^\dagger - \lambda^*\mathbf{1})x|x) = ((T^\dagger - \lambda^*\mathbf{1})x|(T^\dagger - \lambda^*\mathbf{1})x) \\ &= ||(T^\dagger - \lambda^*\mathbf{1})x||^2 = 0 \Rightarrow T^\dagger x = \lambda^* x \end{aligned}$$

□

Satz. *T hermitescher Operator eines unitären VR (das heisst $T = T^\dagger$) $\Rightarrow$ Eigenwerte sind reell.*

$$Tx = \lambda x = T^\dagger x = \lambda^* x$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^*$$

Satz. *T unitärer Operator eines unitären VR (das heisst $T^\dagger T = T T^\dagger =1$) $\Rightarrow$ Eigenwerte haben Betrag* 1.

$$\begin{aligned} (x|x) &= (x|T^\dagger Tx) = (Tx|Tx) \\ &= |\lambda|^2 (x|x) \\ \Rightarrow & \quad |\lambda| = 1 \end{aligned}$$

Satz. *T normaler Operator eines unitären VR $\Rightarrow$ Eigenvektoren x, y zu verschiedenen Eigenwerten λ, μ sind orthogonal.*

$$\begin{aligned} (x, Ty) &= \mu(x, y) = (\underbrace{T^\dagger x}_{\lambda^*}, y) \\ &= \lambda(x, y) \end{aligned}$$

Sei $\mu - \lambda \neq 0$.

$$\Rightarrow (\mu - \lambda)(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = 0$$

Wir hatten bereits die durch Basiswechsel $b_i' = \sum_{k=1}^n s_{ki} b_k$ induzierten Änderungen von Komponenten von Vektoren X und Matrizen A besprochen, nämlich

$$X' = S^{-1} X$$

sowie

$$A' = S^{-1} A S$$

Satz. *Das charakteristische Polynom $P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{1} - A)$ ändert sich nicht bei Basiswechsel $\Longrightarrow$ **Die Eigenwerte sind basisunabhängig** und charakterisieren eindeutig die lineare Abbildung!*

Beweis.

$$\begin{aligned} P_{A'} &= \det(\lambda \mathbf{1} - A') \\ &= \det(S^{-1} S \lambda - S^{-1} A S) \\ &= \det[S^{-1}(\lambda \mathbf{1} - A) S] \\ &= \det S^{-1} \det(\lambda \mathbf{1} - A) \det S \\ &= \det(\lambda \mathbf{1} - A) \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

□

Satz. ***Spektralsatz***
Die Eigenvektoren eines normalen Operators eines unitären VR bilden eine Orthonormalbasis.

Beweis. Sei T normaler Operator eines unitären n-dimensionalen VR, so existiert sicher ein Eigenwert λ_1 und ein Eigenvektor $f_1 \neq 0$, wir normieren $||f_1|| = 1$. Sei $V_1 := \{y \in V | (f_1|y) = 0\}, \quad V_1 \subseteq V$, dann gilt, dass T aus V_1 nicht herausführt, $y \in V_1 \Rightarrow Ty \in V_1$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}(f_1|Ty) &= (T^\dagger f_1|y) = (\lambda_1^* f_1|y) \\ &= \lambda_1 (f_1|y) = 0\end{aligned}$$

Ebenso führt $T^\dagger$ aus V_1 nicht heraus

$$\begin{aligned}(f_1|T^\dagger y) &= (Tf_1|y) = (\lambda_1 f_1|y) \\ &= \lambda_1^* (f_1|y) = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow T$ ist im $(n-1)$ dimensionalen unitärem Raum V_1 wieder normal. $\Rightarrow$ es existiert zumindest ein Eigenwert λ_2 mit Eigenvektor f_2 in V_1 mit $f_2 \neq 0$ und $||f_2|| = 1$ wo $(f_2|f_1) = 0$. Nach n analogen Schritten ist eine Orthonormalbasis $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ gefunden.

$\square$

Satz. ***Spektralsatz und Diagonalisierung normaler Matrizen***
Für normale Matrizen A existiert eine unitäre Basistransformation S, sodass

$$A' = S^\dagger A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & ... & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

diagonalisiert ist. Hier ist $S = (F_1, ..., F_n)$ jene Matrix, deren n Spalten aus den n orthonormalen Eigenvektoren von A besteht. Wir bezeichnen mit F_i eine $n \times 1$ Matrix, die aus den Komponenten des i-ten Eigenvektors f_i gebildet wird.

Beweis. Sei f_i Orthonormalbasis aus Eigenvektoren des normalen Operators T,

$$Tf_i = \lambda_i f_i \qquad \text{mit} \qquad (f_i|f_k) = \delta_{ik}.$$

In Matrixschreibweise gilt

$$A\,F_i = \lambda_i\,F_i$$

wo

$$F_i = \begin{pmatrix} f_{1i} \\ ... \\ f_{ni} \end{pmatrix}$$

und wir schreiben die Orthonormierungsbedingung ausgedrückt durch die Spaltenvektoren F_i und Zeilenvektoren $F_i^\dagger$ als

$$F_i^\dagger F_k = \delta_{ik}$$

Für $S = (F_1, ..., F_n)$

$$S = \begin{pmatrix} f_{11} & ... & f_{1n} \\ ... & ... & ... \\ f_{n1} & ... & f_{nn} \end{pmatrix}$$

folgt damit $S^\dagger S = \mathbf{1}$, d.h. S ist unitär. Weiters

$$\begin{aligned}
A \cdot S &= A \cdot (F_1,\, F_2, ...,\, F_n) = (AF_1,\, AF_2, ...,\, AF_n) = (\lambda_1 F_1,\, \lambda_2 F_2, ...,\, \lambda_n F_n) \\
&= (F_1,\, F_2, ...,\, F_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & ... & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & ... & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad S^\dagger A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & ... & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei normale Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben, wie lauten Eigenwerte, Eigenvektoren sowie Diagonalisierung?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ +2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4 \\
\lambda_1 &= 1 + 2\mathrm{i}, \qquad \begin{pmatrix} +2\mathrm{i} & -2 \\ +2 & +2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\
\Rightarrow 2\mathrm{i}x &= 2y \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \\
\lambda_2 &= 1 - 2\mathrm{i}, \qquad \begin{pmatrix} (-2\mathrm{i} & -2 \\ +2 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\
\Rightarrow f_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
S^{-1} = S^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A' = S^\dagger A S &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Sei A normal. Falls einer der Eigenwerte m-fach entartet ist (d.h. m-fache Nullstelle von $P_A(\lambda)$ ist), gibt es zwar m linear unabhängige Eigenvektoren, diese müssen jedoch nicht notwendigerweise aufeinander orthogonal stehen. Man muss daher Gram-Schmidt anwenden, um daraus m orthonormale Eigenvektoren zu erhalten.

Satz. ***Formulierung des Spektralsatzes mittels Projektionsoperatoren***

Jede normale Matrix A kann in der Form $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ mit Projektionsoperatoren $P_i = F_i F_i^\dagger$ mit den Eigenschaften

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i$$

zerlegt werden.

Beweis. Mittels der Zerlegung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(wo die 1 in der i-ten Zeile und i-ten Spalte steht) schreiben wir

$$
\begin{aligned}
A &= S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S^\dagger \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{11}^* & \dots & f_{n1}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{1n}^* & \dots & f_{nn}^* \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \begin{pmatrix} 0 & f_{1i} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & f_{ni} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ f_{1i}^* & \dots & f_{ni}^* \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i F_i^\dagger = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i
\end{aligned}
$$

Hier ist P_i

$$P_i = F_i F_i^\dagger$$

Projektionsoperator auf den Unterraum zum Eigenwert λ_i. Die Orthogonormierungsrelationen der Eigenvektoren bewirken, dass

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i$$

gilt.

$\square$

Definition. Funktionen normaler Matrizen

Sei A eine normale Matrix, dann definieren wir

$$f(A) = S \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & ... & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S^\dagger$$

Beispiel. Sei $f(x) = x^m$ dann stimmt

$$\begin{aligned} f(A) &= S \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n^m \end{pmatrix} S^\dagger = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S^\dagger \\ &= S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S^\dagger S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S^\dagger ... S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S^\dagger \\ &= A \cdot A \cdots A = A^m \end{aligned}$$

mit dem m-fachen Matrixprodukt überein.

Beispiel. Für $f(x) = \sqrt{x}$ definiert

$$f(A) = S \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & ... & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} S^\dagger$$

die Wurzel $\sqrt{A}$ der normalen Matrix A.

Beispiel. Ein anderes Beispiel für eine Anwendungsmöglichkeit des Spektralsatzes bzw. der Diagonalisierung von Matrizen sind lineare homogene Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$Y' = AY$$

Wählen als Ansatz $Y = Ce^{\lambda x}$ mit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$ damit folgt

$$\begin{aligned} \lambda C e^{\lambda x} &= A C e^{\lambda x} \\ AC &= \lambda C \end{aligned}$$

daraus folgt λ_n sind Eigenwerte und $\vec{c_n}$ sind Eigenvektoren von A.

Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda \mathbf{1} - A) \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, ... \vec{c_1}, \vec{c_2}, ... \\ Y &= k_1 \vec{c_1} e^{\lambda_1 x} + k_2 \vec{c_2} e^{\lambda_2 x} + ... + k_n \vec{c_n} e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} y_1' - 11y_1 - 8y_2 &= 0 \\ y_2' - 8y_1 + y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda - 11 & -8 \\ -8 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 11)(\lambda + 1) - 64$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda - 11 - 64 = 0$$

und somit $\lambda_1 = 15$ und $\lambda_2 = -5$.

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 15$ ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Eigenvektor zu $\lambda_2 = -5$ ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

insgesamt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{15x} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5x}$$