

Aufgabe 1:

$$y' + 2xy \pm xy^2 = 0 \quad (A: +, B: -)$$

$$y = \frac{1}{z} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{z^2} z' + 2 \frac{x}{z} \pm \frac{x}{z^2} = 0$$

$$-z' + 2xz \pm x = 0 \quad (*)$$

(1)

Lsg. von (*) durch

$$(1) \text{ allg. Lsg. von } -z' + 2xz = 0$$

$$+ (2) \text{ spez. Lsg. von } -z' + 2xz \pm x = 0$$

$$(1) \int \frac{dz}{z} = \int dx \cdot 2x + \tilde{C}$$

$$\ln z = x^2 + \tilde{C} \rightarrow z = C e^{x^2}$$

(1)

$$(2) \text{ Ansatz: } z_s(x) = f(x) e^{x^2}$$

$$(*) \rightarrow -f'(x) e^{x^2} \pm x = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \pm \int dx e^{-x^2} \cdot x = \mp \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow z_s = \mp \frac{1}{2}$$

(2)

$$\Rightarrow z = C e^{x^2} \mp \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{C e^{x^2} \mp \frac{1}{2}} \quad (A) \quad y = \frac{1}{C e^{x^2} + \frac{1}{2}} \quad (B) \quad (1)$$

$$\text{Anfangsbed. : } y(0) = \mp 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{C \mp \frac{1}{2}} = \mp 1 \rightarrow C = \mp \frac{1}{2}$$

(1)

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{2}{1+e^{x^2}} \quad (A) \quad , \quad y(x) = \frac{2}{1+e^{x^2}} \quad (B)$$

$$\text{Probe: } y' = \pm \frac{2}{(1+e^{x^2})^2} \cdot 2x e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+e^{x^2})^2} (\pm 4x e^{x^2} \mp 4x (1+e^{x^2}) \pm 4x) = 0$$

(1)

(7)

$$(\text{alternativ: } (*) \rightarrow \int \frac{dz}{2z \pm 1} = \int x dx \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln |2z \pm 1| = \frac{x^2}{2} + C \quad (1)$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{C e^{x^2} \mp 1}{2} \quad (1) \rightarrow \dots)$$

$$2) \quad y' + 2xy \pm xy^2 = 0$$

$$y(0) = \mp 1$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \mathcal{O}(x^5)$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$y^2(x) = a_0^2 + a_1^2 x^2 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2) x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$0 \stackrel{!}{=} y' + 2xy \pm xy^2 = a_1 + (2a_2 + 2a_0 \pm a_0^2)x + (3a_3 + 2a_1 \pm 2a_0 a_1)x^2 + (4a_4 + 2a_2 \pm a_1^2 \pm 2a_0 a_2)x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\text{Anfangsbedingung: } \mp 1 \stackrel{!}{=} y(0) = a_0 \Rightarrow a_0 = \mp 1$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } 0 \stackrel{!}{=} a_1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$0 \stackrel{!}{=} 2a_2 \mp 2 \pm 1 = 2a_2 \mp 1 \Rightarrow a_2 = \pm \frac{1}{2}$$

$$0 \stackrel{!}{=} 3a_3 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$0 \stackrel{!}{=} 4a_4 \pm 1 \pm (\mp 1)(\pm 1) = 4a_4 \Rightarrow a_4 = 0$$

$$\text{Ergebnis: } y(x) = \mp 1 \pm \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\begin{aligned} \text{Entwickle exaktes Ergebnis: } y(x) &= \mp \frac{2}{1+e^{\pm x^2}} = \mp \frac{2}{1+1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\mathcal{O}(x^6)} = \mp \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\mathcal{O}(x^6)} \\ &= \mp \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^6)\right) = \mp 1 \pm \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^6) \end{aligned}$$

Punktevergabe:

- ⑦ Potenzreihe hinschreiben
- ⑦ y' ausrechnen; wenn die unendliche Reihe geschrieben, dann mit Indexumbenennung
- ⑦ y^2 ausrechnen
- ⑦ $y' + 2xy \pm xy^2$ bis $\mathcal{O}(x^4)$ explizit ausrechnen
- ⑦ Randbedingung $y(0) = \mp 1 \Rightarrow a_0 = \mp 1$
- ②,5 a_1 richtig bestimmt
- ②,5 a_2 richtig bestimmt
- ②,5 a_3 richtig bestimmt
- ②,5 a_4 richtig bestimmt
- ⑦ Ergebnis richtig aufschreiben

Zusatzpunkte:

Entweder:

②,5 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ genutzt

②,5 $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ genutzt

⑦ richtig entwickelt

Oder:

⑦ Taylor-Reihe bis $\mathcal{O}(x^2)$ richtig

⑦ Taylor-Reihe bis $\mathcal{O}(x^4)$ richtig

Aufgabe 3

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$$

charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

1

$$f(x) = g_r(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad r = 0$$

1 ist Nullstelle (einfach) $\Rightarrow k = 1$

$$y_s = (ax + b)e^x$$

1

$$y_s' = a e^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$$

$$y_s'' = a e^x + (ax + a + b)e^x = (ax + 2a + b)e^x$$

$$y_s'' - 3y_s' + 2y_s$$

$$= e^x (ax + 2a + b - 3(ax + a + b) + 2(ax + b))$$

$$= e^x (-a) \quad \underline{\underline{!}} \quad e^x$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a = -1 \\ b = 0 \end{matrix}, y_s = -xe^x$$

2

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

1

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x$$

$$y_g' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - e^x - xe^x$$

$$-1 = y_g(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -1 - c_2$$

$$1 = y_g'(0) = c_1 + 2c_2 - 1$$

$$= -1 - c_2 + 2c_2 - 1$$

$$\Rightarrow c_2 = 3, \quad c_1 = -4$$

$$y_g = -4e^x + 3e^{2x} - xe^x$$

1

Aufgabe 3

$$y'' - 3y' + 2y = -e^x$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

charakterist. Polynom

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = 1/2$$

$$f(x) = g_r(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$\rightarrow \alpha = 1, \beta = 0, r = 0$$

1 ist einfache Nullstelle des char. Polynoms

$$\Rightarrow k = 1$$

$$y_s = (ax + b)e^x$$

$$y_s' = a e^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$$

$$y_s'' = a e^x + (ax + a + b)e^x = (ax + 2a + b)e^x$$

$$\therefore y_s'' - 3y_s' + 2y_s$$

$$= e^x (ax + 2a + b - 3(ax + \cancel{2a} + b) + 2(ax + b))$$

$$= e^x (-a) \stackrel{!}{=} -e^x$$

$$\Rightarrow a = 1, y_s = xe^x$$

$$b = 0$$

2

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

1

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + xe^x$$

$$y_g' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + e^x + xe^x$$

$$1 = y_g(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$$

$$-1 = y_g'(0) = c_1 + 2c_2 + 1$$

$$= 1 - c_2 + 2c_2 + 1$$

$$\Rightarrow c_2 = -3, c_1 = 4$$

$$y_g = 4e^x - 3e^{2x} + xe^x$$

1