51. Seien die Vektorräume $V = \mathbf{R}^3$ und $V' = \mathbf{R}^4$ gegeben und eine lineare Abbildung definiert durch $\sigma(\vec{x}) = \vec{x'}$, wo $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{x'} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $Ker\,\sigma$, $Im\,\sigma$, $dim\,Ker\,\sigma$, $dim\,Im\,\sigma$; ist die Abbildung injektiv und / oder surjektiv?

52. Betrachten Sie eine Drehung im $\mathbf{R}^3$ um die x_2- Achse mit Winkel α. Wie lautet die Matrixdarstellung dieser linearen Abbildung? Überprüfen Sie mittels Matrixmultiplikation, dass die Hintereinanderausführung von Drehungen im $\mathbf{R}^3$ um die x_2- Achse mit Winkel α_1 und α_2 eine Drehung im $\mathbf{R}^3$ um die x_2- Achse mit Winkel $\alpha_1 + \alpha_2$. ergibt.

53. Betrachten Sie den Vektorraum P_3 der komplexwertigen Polynome $p(x)$ auf $\mathbf{R}$ vom $Grad\,p(x) \leq 3$. Zeigen Sie, dass

$$b_1(x) = 1,\, b_2(x) = x,\, b_3(x) = x^2,\, b_4(x) = x^3$$

eine Basis von P_3 bilden. Berechnen Sie die Matrix A, die der linearen Abbildung $p(x) \rightarrow \frac{d\,p(x)}{dx}$ zugeordnet ist.

54. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & 0 & -\frac{1}{2}(1-i) \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{2}(1-i) & 0 & \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix}$$

Ist A (anti)symmetrisch / (anti)hermitisch / orthogonal / unitär / normal?

55. Ist jede hermitische Matrix normal? Ist jede normale Matrix hermitisch? Ist das Produkt normaler Matrizen normal?