Übungen zu M2, WS 12/13, M. Könenberg

Aufgabe 33:
Finden Sie die Lösungen der Laplace-Gleichung für das Innere der Einheitskugel, welche auf der Kugeloberfläche dieselben Werte wie

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\, x_2, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2,$$
$$f_4(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

annimmt. Machen Sie dasselbe für die Schwingungsgleichung, wenn μ keine Nullstelle einer Besselfunktion ist.

Aufgabe 34:

(a) Wir betrachten die zwei dimensionale Schwingungsgleichung als Eigenwertproblem:

$$(\Delta + \mu^2)\phi(x) = 0,$$
$$x \in Q = \{x = (x_1, x_2) \,:\, 0 < x_i < 1,\, i = 1, 2\}.$$

ϕ soll auf dem Rand des Quadrats Q verschwinden. Gesucht sind also diejenigen Werte μ^2, für die es Lösungen $\phi \neq 0$ gibt. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen.

(b) Jetzt untersuchen wir die Wellengleichung in "2+1"Dimensionen.

$$(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2})\phi(x, t) = 0,$$
$$x \in Q = \{x = (x_1, x_2) \,:\, 0 < x_i < 1,\, i = 1, 2\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

ϕ soll auf dem Rand des Quadrats Q verschwinden. Lösen Sie dieses Randwertproblem mit Hilfe eines Produktansatzes und Teil a). Geben Sie die allgemeine Lösung an.
Diese Differentialgleichung beschreibt die Schwingung einer Membran, die in einem Quadrat eingespannt ist. In dieser Situation kann man häufig Bereiche, sogenannte Knotenlinien, finden, die nicht mitschwingen. Wie kann man dieses Phänomen anhand der gefundenen Lösungen erklären. Geben Sie ein Beispiel an.