Übungen zu T2, Sommersemester 2012, Blatt 8

56) Harmonischer Oszillator im Heisenbergbild

Gegeben sei der eindimensionale harmonische Oszillator,

$$H = P^2/2m + m\omega^2 X^2/2.$$

Ermitteln Sie die Zeitentwicklung des Orts- und des Impulsoperators mit Hilfe der Heisenbergschen Bewegungsgleichungen. Geben Sie den Zusammenhang der Orts- und Impulsschwankungen zum Zeitpunkt t mit jenen zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem beliebigen Zustand an. Was ergibt sich, falls zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Zustand mit minimalem Unschärfeprodukt vorliegt? Was erhält man, wenn außerdem $\Delta X(0) = \Delta P(0)/m\omega$ erfüllt ist?

57) Bahndrehimpuls

Zeigen Sie, dass die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators

$$L_k = \varepsilon_{klm} X_l P_m$$

die folgenden Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$[L_k, L_l] = i\hbar\varepsilon_{klm} L_m, \quad [L_k, X_l] = i\hbar\varepsilon_{klm} X_m, \quad [L_k, P_l] = i\hbar\varepsilon_{klm} P_m.$$

Hinweis: Benützen Sie die Vertauschungsrelationen $[X_k, P_l] = i\hbar\delta_{kl}$ und $[X_k, X_l] = [P_k, P_l] = 0$ ohne Bezugnahme auf eine konkrete Darstellung.

58) Spin 1

In einem Spin 1-System sei der Eigenzustand von S_3 zum Eigenwert 0 präpariert. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten bei einer Messung von S_1 die Messwerte $+\hbar$, 0, bzw. $-\hbar$ zu erhalten?

59) Kugelfunktionen

Ermitteln Sie die drei Kugelfunktionen zum Drehimpuls $\ell = 1$ und die fünf Kugelfunktionen zum Drehimpuls $\ell = 2$.

Hinweis: Wenden Sie L_- genügend oft auf auf $Y_{\ell\ell}$ an.

60) Die Wellenfunktionen

$$\psi_{kl}(\vec{x}) = x_k x_l \exp(-a^2 \vec{x}^{\,2}) \quad (1 \le k \le l \le 3)$$

spannen einen 6-dimensionalen linearen Raum $\mathcal{D}$ auf. Ist $\mathcal{D}$ unter Drehungen invariant? Ist $\mathcal{D}$ unter Drehungen irreduzibel? Stellen Sie einen Zusammenhang mit den Kugelfunktionen her.

61) Parität

Der Paritätsoperator Π ist (in der Ortsdarstellung) durch $(\Pi\psi)(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$ definiert. Man zeige, dass Π selbstadjungiert ist, $\Pi^2 = 1$ gilt und dass die Wellenfunktionen $\psi(\vec{x}) = u(r)\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ Eigenfunktionen der Observablen ,,Parität“ sind, mit Eigenwert $(-1)^\ell$.

62) Zeigen Sie, dass die Parität eine Erhaltungsgröße ist ($d\Pi/dt = 0$), falls der Hamiltonoperator durch $H = \vec{P}^{\,2}/2m + V(|\vec{X}|)$ gegeben ist.

63) Zeigen Sie, dass die Kommutatorrelation

$$[P_k, f(R)] = -i\hbar \frac{X_k}{R} f'(R)$$

gilt. Dabei ist $R = |\vec{X}|$ und f' bezeichnet die Ableitung der reellwertigen Funktion f.

Hinweis: Es ist am bequemsten in der Ortsdarstellung zu arbeiten. Differenzierbarkeit von f, sowie ein geeigneter Definitionsbereich für die oben angegebenene Relation seien implizit vorausgesetzt.

64) Verallgemeinerte Unschärferelationen

Die Operatoren A_k $(1 \leq k \leq 3)$ seien durch

$$A_k = P_k - i\lambda X_k f(R) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

definiert. Verwenden Sie die Tatsache, dass die Ungleichung

$$\langle A_k\psi | A_k\psi \rangle = \langle \psi | A_k^\dagger A_k \psi \rangle \geq 0 \quad \text{(Summenkonvention!)}$$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ und beliebiges $|\psi\rangle$ aus dem Definitionsbereich von A_k erfüllt ist, um eine Ungleichung herzuleiten, welche die Erwartungswerte von $\vec{P}^{\,2}$, $R^2 f(R)^2$, $f(R)$ und $Rf'(R)$ verknüpft.

65) Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms

Betrachten Sie den Spezialfall $f(R) = 1/R$ um die Ungleichung $\langle \vec{P}^{\,2} \rangle \geq \hbar^2 \langle 1/R \rangle^2$ zu erhalten. Mit ihrer Hilfe können Sie eine untere Schranke für die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms erhalten (siehe Vorlesung). Vergewissern Sie sich, dass sich auf diese Weise sogar die Grundzustandsenergie selbst ergibt.