Übungen zu T2, Sommersemester 2012, Blatt 7

47) Paulische Spinmatrizen

Die Paulischen Spinmatrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen erfüllt sind:

a) $[\sigma_k, \sigma_l] = 2i\varepsilon_{klm}\sigma_m$ (Summenkonvention!)

b) $\sigma_k\sigma_l + \sigma_l\sigma_k = 2\delta_{kl}\mathbb{1}_2$

c) $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\mathbb{1}_2 + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}, \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

48) Unschärferelation für Paulimatrizen

Illustrieren Sie die in Aufgabe 46 besprochene Unschärferelation für $A = \sigma_1$, $B = \sigma_2$ in dem durch die Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{2}\big(\mathbb{1}_2 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}\big), \qquad \vec{a}^2 = 1$$

beschriebenen Zustand.

49) Magnetisches Moment im thermodynamischen Gleichgewicht

Gegeben sei ein Spin 1/2 System in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_3$. Der Operator des magnetischen Moments ist $\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}$ und der Hamiltonoperator ist $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Befindet sich der Spin in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T, so beschreibt die Dichtematrix

$$\rho = \mathcal{N} \exp(-\beta H), \quad \beta = 1/kT$$

den entsprechenden Gleichgewichtszustand. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor $\mathcal{N}$. Berechnen Sie die Erwartungwerte und Schwankungsquadrate von μ_i $(i = 1, 2, 3)$ und H. Skizzieren Sie den Erwartungswert von μ_3 als Funktion der Temperatur T.

50) SU(2)

Überprüfen Sie die Gruppeneigenschaften der SU(2).

51) SO(3)

Überprüfen Sie die Gruppeneigenschaften der SO(3).

52) Funktionen normaler Operatoren für dim $\mathcal{H} = 2$

$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sei ein normaler Operator auf einem *zweidimensionalen* unitären Vektorraum $\mathcal{H}$ mit den Eigenwerten $a_1 \neq a_2$. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine beliebige für $a_{1,2}$ definierte Funktion. Zeigen Sie, dass der lineare Operator $f(A)$ mit Hilfe der Formel

$$f(A) = \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2} A + \frac{a_1 f(a_2) - a_2 f(a_1)}{a_1 - a_2} \mathbb{1}$$

als Linearkombination des Operators A und des Einheitsoperators $\mathbb{1}$ geschrieben werden kann. Es ist also in diesem Fall nicht notwendig die Eigenvektoren (bzw. die dazugehörigen Projektoren $P_{1,2}$) explizit zu berechnen. Was ergibt sich im Fall $a_1 = a_2$?

Hinweis: Drücken Sie die Projektoren $P_{1,2}$ mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$ und der Spektraldarstellung $A = a_1 P_1 + a_2 P_2$ durch A und $\mathbb{1}$ aus und setzen Sie diese Ausdrücke sodann in $f(A) = f(a_1) P_1 + f(a_2) P_2$ ein.

53) Mögliche Parametrisierung der SU(2)-Matrizen

In der Vorlesung wurde die Parametrisierung

$$U(\vec{\alpha}) = \exp(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2), \quad \vec{\alpha} = \alpha\vec{n}, \quad \vec{n}^2 = 1$$

der SU(2)-Elemente verwendet. Beweisen Sie die Relation

$$\exp(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2) = \mathbb{1}_2 \cos(\alpha/2) - i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\alpha/2)$$

(a) durch Anwendung der Formel von Aufgabe 52,

(b) mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion.

54) Drehmatrix

Zeigen Sie, dass sich für eine räumliche Drehung um den Winkel α mit Drehachse $\vec{n}$ (Rechtsschraube) die Matrix $R(\vec{\alpha})$ mit den Matrixelementen

$$R(\vec{\alpha})_{kl} = \cos\alpha\, \delta_{kl} + (1 - \cos\alpha) n_k n_l - \sin\alpha\, \varepsilon_{klm} n_m$$

ergibt.

Hinweis: Zerlegen Sie den zu drehenden Vektor $\vec{x}$ in eine Komponente parallel zu $\vec{n}$ und eine Komponente normal zu $\vec{n}$.

55) Verhalten von Dichtematrizen bei räumlichen Drehungen

Zeigen Sie:

$$U(\vec{\alpha})\vec{a} \cdot \vec{\sigma} U(\vec{\alpha})^\dagger = R(\vec{\alpha})\vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \qquad \vec{a} \in \mathbb{R}^3.$$

Was bedeutet dieses Ergebnis für das Transformationsverhalten der Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{2}\big(\mathbb{1}_2 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}\big), \qquad \vec{a}^2 = 1.$$