Übungen zu T2, Sommersemester 2012, Blatt 6

41) Feynmanregeln

Gegeben ist der Hamiltonoperator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_1\,\delta(x - x_1) + \lambda_2\,\delta(x - x_2), \quad 0 < x_1 < x_2.$$

Die Energieeigenfunktion ($E = \hbar^2 k^2/2m$) für ein von links mit Impuls $\hbar k > 0$ einlaufendes Teilchen hat die Form

$$(e^{ikx} + Re^{-ikx})\theta(x_1 - x) + (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})\theta(x - x_1)\theta(x_2 - x) + Te^{ikx}\theta(x - x_2).$$

Bestimmen Sie die störungstheoretische Entwicklung der Amplituden R, T, A, B bis inkl. Terme quadratisch in $\lambda_{1,2}$ durch Anwendung der folgenden Feynmanregeln:

(a) Die Amplitude für die freie Bewegung eines Teilchens mit Impuls $p = \hbar k$ vom Ort x_i zum Ort x_f ist durch $\exp(ik|x_f - x_i|)$ gegeben.

(b) Die Amplitude für eine *einmalige* Wechselwirkung mit dem am Ort $x_{1,2}$ befindlichen Deltapotential ist $-i\alpha_{1,2}$, wobei $\alpha_n = m\lambda_n/\hbar^2 k$ ($n = 1, 2$) ist.

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $0 < x < x_1$ (Bestimmung von R), $x_1 < x < x_2$ (Bestimmung von A, B) und $x > x_2$ (Bestimmung von T). Zeichnen Sie die entsprechenden Diagramme! Sie können o. B. d. A. annehmen, dass das Teilchen bei $x = 0$ startet.

42) Entwicklung der vollständigen Lösungen

Die vollständigen Lösungen für die vier Amplituden von Bsp. 41 lauten:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{-i\alpha_1 e^{2ikx_1} - i\alpha_2 e^{2ikx_2} - \alpha_1\alpha_2(e^{2ikx_2} - e^{2ikx_1})}{1 + i\alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(e^{2ik(x_2 - x_1)} - 1)}, \\
T &= \frac{1}{(1 + i\alpha_1)(1 + i\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 e^{2ik(x_2 - x_1)}}, \\
A &= \frac{1 + i\alpha_2}{(1 + i\alpha_1)(1 + i\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 e^{2ik(x_2 - x_1)}}, \\
B &= \frac{-i\alpha_2 e^{2ikx_2}}{(1 + i\alpha_1)(1 + i\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 e^{2ik(x_2 - x_1)}}.
\end{aligned}$$

(a) Überprüfen Sie diese Behauptung durch Betrachtung der folgenden Spezialfälle und Vergleich mit dem Ergebnis von Bsp. 40:

$$(i)\ \lambda_1 = 0, \quad (ii)\ \lambda_2 = 0, \quad (iii)\ x_1 = x_2.$$

(b) Entwickeln Sie die Amplituden R, T, A, B bis zur quadratischen Ordnung in $\alpha_{1,2}$ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Bsp. 41.

Quantenmechanik in einem endlichdimensionalen Zustandsraum:

43) Reiner Zustand auf $\mathrm{L}(\mathcal{H})$

Geg.: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Zeigen Sie, dass durch

$$\omega(A) = \langle\psi|A\psi\rangle, \quad A \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$$

ein Zustand definiert wird.

Zur Erinnerung: Eine Abbildung $\omega : \mathrm{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ heißt Zustand, falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

a) $\omega(c_1 A_1 + c_2 A_2) = c_1\omega(A_1) + c_2\omega(A_2) \quad \forall c_{1,2} \in \mathbb{C}, \forall A_{1,2} \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$
b) $\omega(A^\dagger A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$
c) $\omega(\mathbb{1}) = 1$

44) Allgemeine Form eines Zustands auf $\mathrm{L}(\mathcal{H})$

Geg.: $\rho \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$ mit $\rho \geq 0$ und $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$. Zeigen Sie, dass durch $\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$, $A \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$ ein Zustand definiert wird.

45) Maximale Mischung

$\dim \mathcal{H} = N$. Überzeugen Sie sich, dass der Operator $\rho = \mathbb{1}/N$ ein Dichteoperator ist. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{Tr}(\rho A)$ der Observablen A mit der Spektraldarstellung $A = \sum_n a_n |n\rangle\langle n|$, $a_n \in \mathbb{R}$?

46) Allgemeine Form der Unschärferelation

Das Schwankungsquadrat $(\Delta_\omega A)^2$ einer Observablen A im Zustand ω ist durch

$$(\Delta_\omega A)^2 = \omega\big((A - \omega(A))^2\big)$$

definiert.

$A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$ seien zwei hermitesche Operatoren. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Zustand ω stets die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\Delta_\omega A \Delta_\omega B \geq |\omega(\frac{i}{2}[A, B])|.$$

Hinweis: Bilden Sie den (nichthermiteschen) Operator

$$C = \frac{A - \omega(A)}{\Delta_\omega A} + i\frac{B - \omega(B)}{\Delta_\omega B}$$

und die (wegen der Nichtnegativität des Zustands erfüllten) Ungleichungen

$$\omega(C^\dagger C) \geq 0, \quad \omega(CC^\dagger) \geq 0.$$