Übungen zu T2, Sommersemester 2012, Blatt 4

23) Die Wellenfunktion eines Teilchens mit einem Freiheitsgrad habe die Form

$$\psi(x) = \varphi(x) e^{ip_0 x/\hbar}$$

mit reellem p_0 und einer **reellen** Funktion φ mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x)^2 = 1.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert des Impulses. Welche physikalische Bedeutung besitzt die Größe p_0?

24) Impulsoperator

Bestimmen Sie die Erwartungwerte von P und P^2 für das Gaußsche Wellenpaket von Aufgabe 18. Was erhält man für die Impulsunschärfe ΔP? Überprüfen Sie die Unschärferelation.

25) Rechnung im Impulsraum

Diskutieren Sie die Beispiele 22 und 23 im Impulsraum! Skizzieren Sie $|\tilde{\varphi}(p)|^2$ (zu Bsp. 22) bzw. $|\tilde{\psi}(p)|^2$ (zu Bsp. 23)!

26) Rechnung in drei Raumdimensionen

Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\vec{P}$ und $\vec{P}^2$ für die Grundzustandswellenfunktion des H-Atoms.

27) Impulsraumwellenfunktionen mit minimalem Unschärfeprodukt

Jene Impulsraumwellenfunktionen, für die das Produkt aus Orts- und Impulsunschärfe den minimalen Wert $\Delta X \Delta P = \hbar/2$ besitzt, sind durch die Gleichung

$$\left(\frac{X - x_0}{\sigma} + i\, \frac{p - p_0}{\hbar/2\sigma} \right) \tilde{\psi}(p) = 0$$

charakterisiert. Dabei bezeichnet p den Impulsoperator in der Impulsdarstellung und $X = i\hbar\, \partial/\partial p$ den Ortsoperator im Impulsraum. x_0 ist der Erwartungswert des Ortsoperators, p_0 der Erwartungswert des Impulsoperators und $\sigma = \Delta X$ die Ortsunschärfe. Ermitteln Sie $\tilde{\psi}(p)$, wobei die übliche Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, |\tilde{\psi}(p)|^2 = 1$$

erfüllt sein soll.

28) Zeitentwicklung im Impulsraum

Ein freies Teilchen mit Masse m sei zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die in Bsp. 27 berechnete Wellenfunktion beschrieben. Diskutieren Sie die Zeitentwicklung im Impulsraum. Bestimmen Sie Mittelwerte und Schwankungsquadrate von X und P zum Zeitpunkt t.

29) Zeitentwicklung im Ortsraum

Verwenden Sie das Ergebnis von Bsp. 27 für $x_0 = 0$, um die Zeitentwicklung der entsprechenden Ortsraumwellenfunktion zu erhalten. Geben Sie $|\psi(x,t)|^2$ an.

Hinweis: Es seien $c, d \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, c > 0$. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-c(x-d)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}.$$

30) Kontinuitätsgleichung

Die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion im Ortsraum wird durch die Schrödingergleichung

$$i\hbar\dot{\psi}(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x},t) + V(\vec{x})\psi(\vec{x},t)$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2$$

und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi(\vec{x},t)^*\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t) - \vec{\nabla}\psi(\vec{x},t)^*\psi(\vec{x},t)\right]$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot j(\vec{x},t) = 0$$

erfüllen.