

Übungen zu T2, Sommersemester 2012, Blatt 3

14) Parameterintegral

Berechnen Sie das von dem Parameter $u > 0$ abhängige Integral

$$I(u) = \int_0^{\infty} dr e^{-ur}.$$

Berechnen Sie sodann

$$\int_0^{\infty} dr r^n e^{-ur}$$

($n \in \mathbb{N}$) durch n -maliges Differenzieren von $I(u)$ nach dem Parameter u .

15) H-Atom

Die Grundzustandswellenfunktion eines Elektrons im Wasserstoffatom hat die Form

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} \exp(-r/a).$$

Dabei ist $r = |\vec{x}|$ der Abstand vom Kern, $a = \hbar/m_e\alpha c$ der Bohrsche Radius und $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante.

- (a) Welcher numerische Wert ergibt sich für den Bohrschen Radius?
- (b) Wie ist \mathcal{N} zu wählen, damit die Wellenfunktion richtig normiert ist?

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat von Aufgabe 14.

16) Erwartungswert

Berechnen Sie die Erwartungswerte von r^{-1} , r und r^2 in dem durch die Wellenfunktion von Aufgabe 15 beschriebenen Zustand.

17) Gaußsches Integral

- (a) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-ax^2) = \sqrt{\pi/a}$, wobei $a > 0$.
- (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp(-ax^2) = ?$
- (c) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \exp(-ax^2)$ mit Hilfe von (a).

18) Gaußsches Wellenpaket

In einer Raumdimension sei die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \mathcal{N} \exp(-x^2/4\sigma^2)$$

gegeben.

- (a) Wie ist der Normierungsfaktor \mathcal{N} zu wählen?
- (b) Was erhält man für den Erwartungswert des Ortsoperators?
- (c) Was ergibt sich für den Erwartungswert von x^2 ?
- (d) $\Delta x = ?$

19) Räumliche Translation

Die Wirkung des Operators T_a auf eine Wellenfunktion ψ (in einer Raumdimension) sei durch

$$(T_a\psi)(x) = \psi(x - a), \quad a \in \mathbb{R}$$

definiert. Geben Sie eine anschauliche Interpretation der Wirkung von T_a . Was ergibt sich für das Produkt $T_a T_b$? Was ergibt sich für T_a^\dagger , $T_a^\dagger T_a$ und $T_a T_a^\dagger$? Zu welcher Klasse von Operatoren gehört T_a ?

20) Gruppeneigenschaften

Zeigen Sie, dass $\{T_a | a \in \mathbb{R}\}$ bezüglich des Produkts $T_a T_b$ eine abelsche Gruppe bildet.

21) Erzeuger räumlicher Translationen

Überprüfen Sie, dass unter geeigneten Voraussetzungen an die Funktion $\psi(x)$

$$\left. \frac{\partial}{\partial a} (T_a\psi)(x) \right|_{a=0} = -\frac{iP}{\hbar} \psi(x),$$

gilt, wobei P der Impulsoperator in der Ortsdarstellung ist.

22) Reelle Wellenfunktion

Betrachten Sie den **Spezialfall** einer **reellen** Wellenfunktion $\varphi(x)$ in einer Dimension, die für $x \rightarrow \pm\infty$ verschwindet. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Erwartungswert des Impulses Null ist.