MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK 1

Helmuth Hüffel
Fakultät für Physik der Universität Wien

Vorlesungsskriptum
Sommersemester 2012

Umgesetzt in LYX von Johannes Horak

Version vom 11-06-2012

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Arfken, George B. und Hans-Jurgen Weber: *Mathematical methods for physicists.* Elsevier Acad. Press, Amsterdam [u.a.], 2005.

[2] Berendt, G. und E. Weimar: *Mathematik für Physiker*, Band 1. Physik-Verlag, 1990.

[3] Berendt, G. und E. Weimar: *Mathematik für Physiker*, Band 2. Physik-Verlag, 1990.

[4] Heinzle, Mark: *Mathematische Methoden der Physik I, Skriptum.* Sommersemester 2010, Version vom 3.5.2010.

[5] Kamke, Erich: *Differentialgleichungen Loesungsmethoden und Loesungen.* Teubner, Stuttgart, 1983.

[6] Lang, Christian B. und Norbert Pucker: *Mathematische Methoden in der Physik.* Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, 2005.

[7] Marsden, J. E. und M. J. Hoffmamn: *Basic Complex Analysis.* Freeman and Company, 1987.

[8] Neufeld, Helmut: *Mathematische Methoden der Physik I, Skriptum.* Somersemester 2008, Version vom 10.2.2012.

Kapitel 1

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine *Differentialgleichung* (DGL) ist eine Gleichung, in der die Variable x, die gesuchte Funktion $y(x)$ sowie deren Ableitungen vorkommen.

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* in einer Variable x und einer gesuchten Funktion $y(x)$ ist von der Form

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Die höchste auftretende (n-te) Ableitung heißt *Ordnung* der Differentialgleichung.

Beispiel (Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung)**.**

$$(y')^2 + y^2 = 1$$

Einen bedeutenden Spezialfall stellt die *lineare gewöhnliche Differentialgleichung* dar: sie ist linear in $y, y', y'', \ldots$

Beispiel (Lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung)**.**

$$y'' + y = 0 \tag{1.1}$$

mit Lösung (c_1, c_2 Konstanten)

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{1.2}$$

Bemerkung (Notation)*.* Motiviert von der physikalischen Anwendung heißt die Variable oft t (*time*) und die gesuchte Funktion $x(t)$; die Ableitung nach t wird mit einem Punkt bezeichnet, $\dot{x}(t)$. In dieser Schreibweise lauten die obige DGL (1.1) und ihre Lösung (1.2)

$$\ddot{x} + x = 0$$

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Fragen, die im Zusammenhang mit DGL auftreten, sind insbesondere nach *Existenz*, *Eindeutigkeit* und *Gesamtheit* der Lösungen.

Ein *Anfangswertproblem* gibt Werte zu einer DGL ausschließlich an derselben Stelle vor,

$$y(x_0), y'(x_0), \ldots$$

bzw.

$$x(t_0), \dot{x}(t_0), \ldots$$

Ein Randwertproblem gibt dagegen Werte an verschiedenen Stellen vor, z. B. ($x_0 \neq x_1$)

$$y(x_0), y(x_1)$$

bzw.

$$x(t_0), x(t_1)$$

Beispiel (Randwertproblem)**.**

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass $y(x) = 0$ für alle x. Dieses Randwertproblem hat damit *keine nichttriviale* Lösung!

Wir ändern unsere Fragestellung und wollen jetzt wissen, zu welchen Werten $\lambda \in \mathbb{C}$ es Lösungen $y(x)$ gibt, die

$$y'' + \lambda y = 0$$

erfüllen, und wie alle diese λ_n und $y_n(x)$ (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) lauten. Ein Beispiel für eine solche Situation liefert die Quantenmechanik (QM): Für welche Energiewerte hat die Schrödingergleichung eines Elektrons im Wasserstoffatom Lösungen?

1.1 Gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Peano, Picard-Lindelöf; ohne Beweis))**.** *Sei*

$$y' = f(x, y)$$

Wenn f stetig im rechteckigen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ist, sowie in G die Lipschitzbedingung *erfüllt, so gibt es für jedes $(x_0, y_0) \in G$ genau eine Lösung der DGL, die in einer Umgebung von x_0 definiert ist, $y(x_0) = y_0$ erfüllt und stetig von (x_0, y_0) abhängt.*

Definition (Lipschitzbedingung)**.** Die Funktion f erfüllt im rechteckigen Gebiet G eine Lipschitzbedingung, wenn es ein $N > 0$ gibt, sodass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in G$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N\, |y_2 - y_1|$$

Bemerkung. Für uns genügt die schwächere Version für Existenz und Eindeutigkeit, dass f in einem rechteckigen Gebiet *stetig* sein und (bei festem x) eine *beschränkte partielle Ableitung nach y* haben soll,

d. h.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < N$$

für $N > 0$ sein soll.

Beispiel.

$$y' = \sqrt{y}$$
$$y(0) = 1$$

Voraussetzung des Eindeutigkeitssatzes mit $y \geq a$, $a > 0$ erfüllt.

$$f(x,y) = \sqrt{y}$$

ist stetig,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

ist beschränkt, da $a > 0$. Also existiert eine eindeutige Lösung (siehe Übungen).

Speziell für

$$y' + f(x)y = g(x)$$

lautet der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (EES):

Wenn $f(x)$, $g(x)$ auf abgeschlossenen Intervall stetig, dann gibt es eine eindeutige Lösung, die die Anfangsbedingung $y(x_0)$, $x_0 \in I$ erfüllt.
Schließlich für

$$y'' = f(x,y,y')$$

ist der EES wie folgt:

Wenn f stetig im zylindrischen Gebiet $G = I \times K_2$ (wo $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $K_2 \in \mathbb{R}^2$Kreisscheibe) ist, und partielle Ableitungen nach y, y' besitzt, so existiert eine eindeutige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = \eta_0$$
$$y'(x_0) = \eta_1$$

erfüllt.

1.1.1 Typ getrennte Variable

$$\begin{aligned} y' &= \frac{f(x)}{g(y(x))} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{f(x)}{g(y)} \\ \int g(y)\mathrm{d}y &= \int f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Genauer fordern wir, dass f,g in rechteckigem Gebiet, wo $g \neq 0$, stetig sind und haben

$$\int_a^x g(y(t))y'(t)dt = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Setzen $s = y(t)$, $ds = y'(t)dt$, $y(a) = b$

$$\int_b^{y(x)} g(s)ds = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Der Satz über implizite Funktionen garantiert Eindeutigkeit und Existenz der Lösung $y(x)$ in Umgebung einer Anfangsbedingung $y(a) = b$.

Beispiel.

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Voraussetzung des Eindeutigkeitssatzes mit $y \geq a$, $a > 0$ erfüllt:

$$f(x,y) = \sqrt{y}$$

ist stetig,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

ist beschränkt, da $a > 0$. Also existiert eine eindeutige Lösung (siehe Übungen).

1.1.2 Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Allgemein gilt

$$y_{\text{ges}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{spez}}(x)$$

y_{hom} ist allgemeine Lösung von $y' + f(x)y = 0$ und diese Dgl ist vom Typ getrennte Variable

$$y' + f(x)y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$

$$y(x) = c\, e^{-\int_a^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}, \quad c \in \mathbb{R}$$

y_{spez} ist (irgendeine) spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $y' + f(x)y = g(x)$ und wird durch „Variation der Konstanten“ bestimmt:

$$y_{spez}(x) = k(x)e^{-\int_a^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}$$

Mit der Bezeichnung $\bar{y}(x) = e^{-\int_a^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}$ ist $y_{spez}(x) = k(x)\bar{y}(x)$. Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert

$$k'\bar{y} + k\bar{y}' + fk\bar{y} = g$$

$$k'\bar{y} = g$$

Die Dgl für $k(x)$ ist erneut vom Typ getrennte Variable

$$k(x) = \int_b^x d\tilde{x}\, \frac{g(\tilde{x})}{\bar{y}(\tilde{x})}$$

somit

$$y_{spez}(x) = \int_b^x d\tilde{x}\, \frac{g(\tilde{x})}{e^{-\int_a^{\tilde{x}} d\hat{x}\, f(\hat{x})}}\; e^{-\int_a^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ folgt schlussendlich (siehe Übungen) für $y = y_{hom} + y_{spez}$

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^x d\bar{x}\, f(\bar{x})} + \int_{x_0}^x d\tilde{x}\, \frac{g(\tilde{x})}{e^{-\int_{x_0}^{\tilde{x}} d\hat{x}\, f(\hat{x})}}\; e^{-\int_{x_0}^x d\bar{x}\, f(\bar{x})}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned}
y' + y &= 1 + x, \quad y(0) = 1 \\
y_{\mathrm{hom}} &= c\mathrm{e}^{-x}, \quad c \in \mathbb{R} \\
y_{\mathrm{spez}}(x) &= k(x)\mathrm{e}^{-x} \\
k'\mathrm{e}^{-x} - k\mathrm{e}^{-x} + k\mathrm{e}^{-x} &= 1 + x \\
k' &= (1 + x)\mathrm{e}^x \\
k(x) &= \int (1 + x)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = x\mathrm{e}^x + c_1
\end{aligned}$$

wählen $c_1 = 0$, sodass

$$y_{\mathrm{spez}}(x) = k(x)\mathrm{e}^{-x} = x$$

$$y_{\mathrm{ges}} = c\mathrm{e}^{-x} + x$$

Eisetzen der Anfangsbedingung führt zu $y = \mathrm{e}^{-x} + x$.

1.1.3 Lösungstechniken für explizite DGL 1. Ordnung

1.1.3.1 Substitution

Gelegentlich kann DGL $y' = f(x,y)$ durch trickreiches Einführen neuer Variabler in eine DGL eines lösbaren Typs umgewandelt werden.

Beispiel.

$$y' = \frac{y-x}{y+x}, \quad y(1) = 0$$

umgeformt

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

legt dies die Einführung von $z = \frac{y}{x}$ nahe, bzw $y = z\,x$ sowie $y' = z'\,x + z$

$$z'\,x + z = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\int dz \frac{z+1}{1+z^2} = -\int dx \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{2} ln(1+z^2) + arctg\, z = -ln \mid x \mid + c$$

Rückeinsetzen von $z = \frac{y}{x}$ und Umformungen führen zu

$$ln(x^2 + y^2) = k - 2arctg\,\frac{y}{x}$$

Die Anfangsbedingung legt Konstante $k = 0$ fest, sodass

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e^{-arctg\,\frac{y}{x}}$$

Über den Satz impliziter Funktionmen können wir die Lösung $y(x)$ explizit und eindeutig gewinnen. Schöner lässt sich die Lösungskurve durch Verwenden von Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$ als

$$r = e^{-\varphi}$$

schreiben.

1.1.3.2 Iteration

Umwandlung der DGL in Integralgleichung

$$y'(x) = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} dt\, y'(t) = \int\limits_{x_0}^{x} dt\, f(t, y(t))$$

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} dt\, f(t, y(t))$$

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dt\, f(t, y(t))$$

Iteratives Lösen der Integralgleichung:

0-te Näherung: $y_0(x) = y_0$
1-te Näherung: $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} dt\, f(t, y_0(t))$
2-te Näherung: $y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} dt\, f(t, y_1(t))$
...
Wenn Lippschitzbedingung erfüllt ist, dann konvergieren $y_n(x) \to y(x)$ gleichmäßig (o. Bew.).

Beispiel.

$$y' = -y + 1 + x, \quad y(0) = 1$$

bedeutet $f(x, y) = -y + 1 + x, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1$, sodass

$$y = 1 + \int\limits_{0}^{x} dt\, (-y(t) + 1 + t)$$

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} dt\, (-1 + 1 + t) = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \ldots$$

Vergleich mit der exakten Lösung $y(x) = e^{-x} + x$ nach Taylorreihenentwicklung der Exponentialfunktion zeigt Übereinstimmung

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \ldots$$

1.1.3.3 Potenzreihenansatz

Oft lässt sich Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ durch Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ finden. Aus $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$ folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n = f(x, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$$

Die rechte Seite muss nun ebenfalls in Potenzreihe entwickelt werden, Koeffizientenvergleich führt zu Rekursionsformeln für die Koeffizienten a_n. Konvergenz der so gewonnenen Lösung ist zu überprüfen.

Beispiel.

$$y' = -y + 1 + x, \quad y(0) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 + x$$

Koeffizientenvergleich für x^k:

$$\begin{array}{ll} k=0 & a_1 = -a_0 + 1 \\ k=1 & 2a_2 = -a_1 + 1 = a_0 \\ k \geq 2 & (k+1)a_{k+1} = -a_k \end{array}$$

$$a_{k+1} = -\frac{a_k}{k+1} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} = \ldots = \frac{(-1)^{k+1}a_2}{(k+1)k(k-1)\ldots 3} = \frac{(-1)^{k+1}2a_2}{(k+1)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}a_0, \quad k \geq 2$$

bzw.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}a_0, \quad n \geq 3$$

Damit erhalten wir

$$y(x) = a_0 + (-a_0+1)x + \frac{a_0}{2}x^2 + a_0 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ führt zu $a_0 = 1$

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n = 1 + \frac{1}{2}x^2 + e^{-x} - (1 - x + \frac{1}{2}x^2) = e^{-x} + x$$

Dies stimmt mit der exakten Lösung $y(x) = e^{-x} + x$ überein.

1.1.4 Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Ansatz:

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 :\ y_{\text{hom}} = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda :\ y_{\text{hom}} = c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 x\mathrm{e}^{\lambda x}$
- Wenn y_1, y_2 Lösungen der homogenen linearen DGL sind, so ist $c_1y_1 + c_2y_2$ selbst für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ eine Lösung
  - wenn $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ gilt für $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$: $y_1^* = y_2$ und

    $$\begin{aligned} \operatorname{Re} y_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_1^*) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ \operatorname{Im} y_1 &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1 - y_1^*) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

    Es gilt

    $$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} &= \mathrm{e}^{\alpha} \cos\beta x \\ \operatorname{Im} \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} &= \mathrm{e}^{\alpha} \sin\beta x \end{aligned}$$

    Für die homogene Lösung können wir somit ebenso gut schreiben

    $$y_{\text{hom}} = \mathrm{e}^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

Zur Erinnerung:

2 Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ sind linear unabhängig (heißen Hauptsystem) wenn $\forall x$ die Wronski-Determinante nicht verschwindet

$$0 \neq W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Beispiel. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \, \forall x$$

1.1.5 Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$
$$y_{\text{ges}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{spez}}$$
$$y_{\text{spez}} = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung $y_{\text{hom}} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ kennen wir schon. Eine spezielle Lösung y_{spez} bestimmen wir mittels einer verallgemeinerten Methode der Variation der Konstanten. Man kann durch Einsetzen in die inhomogene DGL nicht beide c_1, c_2 festlegen, daher ist extra Bedingung notwendig. Jede spezielle Lösung ist wählbar und somit jeder erfolgreiche Ansatz erlaubt. Tatsächlich führt die Bedingung

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

zu der einfachen Formel

$$y_{\text{spez}}(x) = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} \mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} \mathrm{d}x$$

Beweis.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

$$y'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

Einsetzen in die inhomogene Dgl. führt nach Vereinfachung mehrerer Terme zu

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f$$

Gemeinsam mit der Bedingung

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

stellt dies ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten c_1' und c_2' dar. Die Lösung lautet

$$c_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \qquad c_2' = \frac{y_1 f}{W}$$

sodass

$$c_1 = -\int \frac{y_2 f}{W} dx, \qquad c_2 = \int \frac{y_1 f}{W} dx, \qquad y_{spez} = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} \mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} \mathrm{d}x$$

Die Gesamtlösung der inhomogenen linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten lautet hiermit

$$y(x) = k_1\, y_1(x) + k_2\, y_2(x) - y_1(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_2(x')\, f(x')}{W(x')} \mathrm{d}x' + y_2(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_1(x')\, f(x')}{W(x')} \mathrm{d}x'$$

□

Beispiel. $y'' + y = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ $\qquad \Rightarrow f(x) = 1$

$$\lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$$

$$y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$y_{\text{spez}} = -\cos x \int \sin x\, \mathrm{d}x + \sin x \int \cos x\, \mathrm{d}x = 1$$

$$y_{\text{ges}} = k_1 \cos x + k_2 \sin x + 1$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ergibt $k_1 = 1$, $k_2 = -1$.

1.1.6 Ansatz für spezielle Lösung der inhomogenen lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hier soll ein eleganter rascher Ansatz für das Auffinden einer speziellen Lösung der inhomogenen linearen Dgl. 2. Ordnung vorgestellt werden: Sei in der Dgl

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

der inhomogene Term von der Form $f(x) = f_r(x) e^{\alpha x} cos \beta x$, wo $f_r(x)$ ein Polynom r-ten Grades sowie $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ ist. Beachte, dass $k = 0, 1, 2$ als mögliche Werte auftreten können. Dann lautet der Ansatz für eine spezielle Lösung

$$y(x) = g_{r+k}(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

wo $g_{r+k}(x)$ ein Polynom $r + k$ ten Grades ist. Dieses Poynom kann mittels Koeffizientenvergeleichs durch Einsetzen in die KOMPLEX ERWEITERTE Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_r(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

ermittelt werden. Der REALTEIL von $y(x)$ liefert die spezielle Lösung

$$y_s(x) = Re\, y(x)$$

Ist andererseits der inhomogene Term von der Form $f(x) = f_r(x)e^{\alpha x} sin\beta x$, wo erneut $f_r(x)$ ein Polynom r-ten Grades sowie $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ sind und $k = 0, 1, 2$ als mögliche Werte auftreten, dann lautet der Ansatz für eine spezielle Lösung gleich wie vorher

$$y(x) = g_{r+k}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

wo $g_{r+k}(x)$ ein Polynom $r + k$ ten Grades ist. Dieses Poynom wird mittels Koeffizientenvergeleichs gleich wie vorher durch Einsetzen in die KOMPLEX ERWEITERTE Differentialgleichung bestimmt

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_r(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

jedoch ist es nun der IMAGINÄRTEIL von $y(x)$, der die spezielle Lösung liefert

$$y_s(x) = Im\, y(x)$$

Beispiel. $y'' + \omega_0^2 y = cos\omega x, \qquad \omega_0 \neq \omega \qquad \Longrightarrow r = 0, \alpha = 0, \beta = \omega, \lambda_0 = \omega$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_0$$

Somit gilt $k = 0$, $r + k = 0$ und $g_0(x) = c$. Der Ansatz lautet $y = ce^{i\omega x}$ und wird in $y'' + \omega_0^2 y = e^{i\omega x}$ eingesetzt.

$$ci^2\omega^2 e^{i\omega x} + \omega_0^2 c e^{i\omega x} = e^{i\omega x}$$

Daraus bestimmen wir $c = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$, $y = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega x}$, $y_s = Re\, y = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} cos\omega x$

1.1.7 Allgemeine lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

Wenn f, g, h stetig in Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so existiert eine eindeutige Lösung mit $y(x_0) = \eta_0$, $y'(x_0) = \eta_1$, wo $x_0 \in I$.

1.1.7.1 Allgemeine lineare homogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

Es existieren 2 linear unabhängige Lösungen, aber es gibt *kein allgemeines* Verfahren zu deren Bestimmung. Manchmal ist eine Lösung $y_1(x)$ bekannt (z.B. durch Erraten), dann kann man dazu eine l.u. Lösung $y_2(x)$ bestimmen: Betrachten zunächst W, leiten ab und setzen für y'' die DGL ein:

$$\begin{aligned}
W &= y_1y_2' - y_2y_1' \\
W' &= y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1'' \\
&= y_1(-fy_2' - gy_2) - y_2(-fy_1' - gy_1) = -f(y_1y_2' - y_2y_1') \\
&= -fW \\
\int \frac{\mathrm{d}W}{W} &= -\int f\mathrm{d}x \\
\ln W &= -\int f\mathrm{d}x \\
W &= \mathrm{e}^{-\int f\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Trick:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2} \\
\frac{y_2}{y_1} &= \int \frac{W}{y_1^2}\mathrm{d}x \\
y_2 &= y_1 \int \frac{W}{y_1^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Beispiel.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0,\ |x| < 1$$

Durch Erraten: $y_1(x) = x$

Probe:

$$\begin{aligned}
y_1' &= 1 \\
y_1'' &= 0 \\
-\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2}x &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{2x}{1-x^2} \\
W(x) &= \mathrm{e}^{-\int \frac{-2x}{1-x^2}\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= x\int \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \dots \\
&= x\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= -1+\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}
\end{aligned}
$$

1.1.7.2 Allgemeine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

$$y_{\text{ges}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{spez}}$$

Die homogene Lösung wird wie zuvor bestimmt, die spezielle Lösung wieder mittels Variation der Konstanten

$$y_{\text{ges}} = k_1y_1 + k_2y_2 - y_1\int \frac{y_2h}{W}\mathrm{d}x + y_2\int \frac{y_1h}{W}\mathrm{d}x$$

1.1.8 Typ $y''(x) = F(y)$

Trick: Es gilt allgemein $y'y'' = \frac{1}{2}\frac{d(y'^2)}{dx}$; wir multiplizieren die Dgl mit y'

$$y'y'' = y'F(y)$$

sodass

$$\frac{1}{2}\frac{d(y'^2)}{dx} = \frac{dy}{dx}F(y) \tag{1.3}$$

Salopp erhalten wir daraus sofort

$$\frac{1}{2}\int d(y'^2) = \int dyF(y)$$

$$\frac{1}{2}y'^2(x) = \int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} dsF(s) + C$$

Genauer folgt dieses Ergebnis aus (1.3) gemäß

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\left(y'(\xi)^2\right)}{d\xi}d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} F(y(\xi))y'(\xi)d\xi$$

und der Substitution $s = y(\xi)$, $ds = y'(\xi)d\xi$.

Wenn wir statt der Variablen $y(x)$ die Variablen $x(t)$ betrachten, lauten die obigen Formeln auf analoge Weise

$$\ddot{x} = F(x)$$

sowie

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) = \int\limits_{x(t_0)}^{x(t)} d\xi F(\xi) + C$$

Wichtigstes Beispiel ist das Newtonsche Kraftgesetz (hier in d=1 Dimensionen diskutiert)

$$m\ddot{x} = F(t)$$

m bezeichnet die Masse eines Teilchen, $F(t)$ die Kraft, die auf dieses Teilchen wirkt. Sei $t_0 = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ dann haben wir

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \int\limits_{x_0}^{x(t)} d\xi F(\xi) + C$$

Wir definieren

- $K(\dot{x}) := \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ... kinetische Energie
- $V(x) := -\int_{x_0}^{x} d\xi F(\xi)$ ... potentielle Energie

Damit lautet unser obiges Ergebnis $K + V = C$, was den Namen „Energieerhaltungssatz“ trägt.

Um $x(t)$ zu berechnen fahren wir folgendermaßen fort

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -V(x) + C$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(C - V(x))}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(C - V(\xi))}} = t$$

Für unser Beispiel wollen wir nun konkret $F(x) = -\lambda^2 x$, bzw. $V(x) = \frac{1}{2}\lambda^2 x^2$, sowie $m = 1$, $x_0 = 0$, $v_0 = \lambda$ betrachten. Der Energierhaltungssatz lautet

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2(t) = C$$

Ausgewertet zur Zeit $t_0 = 0$ berechnen wir

$$C = \frac{1}{2}\lambda^2$$

sodass nur noch das Intergal

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = t$$

zu bilden ist. Wir finden sofort

$$\frac{1}{\lambda} arcsin\, x = t$$

$$x(t) = sin\, \lambda t$$

Kapitel 2

Funktionentheorie

Differential- und Integralrechnung mit komplexen Zahlen.

2.1 Grundbegriffe komplexer Zahlen

Historisches Beispiel *Gerolamo Cardano* (1545):

> „Sieh von den damit verbundenen Geistesqualen ab, und setze die angenommene Antwort in die Gleichung ein ...“

$$x(10-x) = 40 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{-15} \text{ mit } (\sqrt{-15})^2 := -15$$

Probe: $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$

$$\begin{aligned} x^3 = 15x + 4 \Rightarrow x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Erst nach **300** Jahren fertiger Formalismus:

Definition. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ besteht aus Elementen (x, y) des $\mathbb{R}^2$ mit

- Addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Multiplikation mit reeller Zahl $a \in \mathbb{R} : a(x, y) = (ax, ay)$
- Multiplikation $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$

Satz. $\mathbb{C}$ *bildet einen* kommutativen *Körper*

(ohne Beweis, trivial)

Notation:

reelle Zahlen Punkte auf x-Achse. z.B.: $1 = (1, 0)$

imaginäre Zahlen Punkte auf der y-Achse. Definieren $\mathrm{i} := (0, 1)$

$\Rightarrow (x, y) = x + \mathrm{i} \cdot y$

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}^2 &= ? \\
\mathrm{i}^2 &= (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0) \\
&= -1
\end{aligned}$$

somit lautet eine äquivalente Definition

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y | x, y \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1\}$$

- $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$
- $az = ax + \mathrm{i}ay$

- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2)$

Bemerkung. aus $a + \mathrm{i}b = c + id$ folgt $a = c$ **und** $b = d$. (Wegen der Definition von Gleichheit im $\mathbb{R}^2$)

Definition. Komplexe Konjugation

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad z^* = x - \mathrm{i}y$$

Es gilt

- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

Beweis durch einsetzen!

Definition. Norm ($\equiv$ Betrag)

$$|z| := \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Beweis: $\sqrt{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \sqrt{x^2 - \mathrm{i}^2y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Es gilt

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

Beweis: $\sqrt{z_1z_2(z_1z_2)^*} = \sqrt{z_1z_1^*z_2z_2^*} = \sqrt{z_1z_1^*}\sqrt{z_2z_2^*}$

Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
(ohne Beweis, wie im $\mathbb{R}^2$)

Definition. *Reel- und Imaginärteil*

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \mathrm{Re}\, z = x \qquad \mathrm{Im}\, z = y$$

es gilt

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2\mathrm{i}}$$

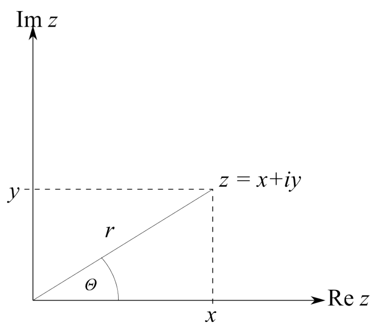
Beispiel.

$$\mathrm{Im} \frac{z+2}{z-1} = ?$$

Trick: Nenner mit komplexer Konjugation erweitern!

$$\begin{aligned}
\frac{z+2}{z-1} &= \frac{x+2+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y} \\
&= \frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y} \cdot \frac{(x-1)-\mathrm{i}y}{(x-1)-\mathrm{i}y} \\
&= \frac{(x+2)(x-1)+y^2+\mathrm{i}[\overbrace{y(x-1)-y(x+2)]}^{=-3y}}{(x-1)^2+y^2} \\
\mathrm{Im} \frac{z+2}{z-1} &= \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}
\end{aligned}$$

2.1.1 Polardarstellung komplexer Zahlen



Es ist $\tan \Theta = \frac{y}{x}$ und $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$z = x + \mathrm{i}y = r \cos \Theta + \mathrm{i} r \sin \Theta = r(\cos \Theta + \mathrm{i} \sin \Theta)$$

r heißt Betrag von z, Θ heißt Argument von z, $\Theta = \arg z$.

Bemerkung. $\arg z$ ist keine eindeutige Funktion: $\Theta + 2\pi n$, mit $n \in \mathbb{Z}$, gehört zu gleichem z, man sagt $\arg z$ hat mehrere *Zweige*. Bei fixem z ist $\arg z$ eine unendlich fach mehrdeutige Funktion.

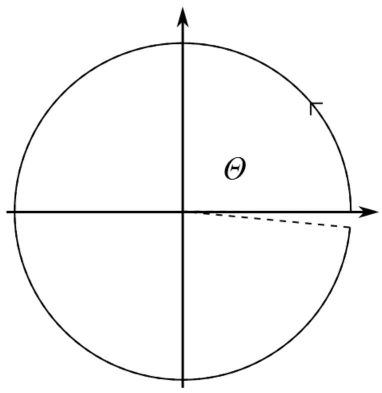
Beispiel. $z = \mathrm{i}$

$$\arg \mathrm{i} = \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{5\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + 4\pi = -\frac{9\pi}{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

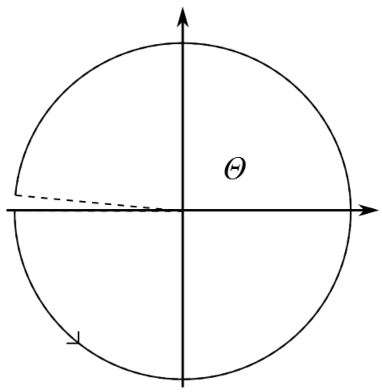
Wahl eines Zweiges von $arg\, z$:
Man kann die mehrdeutige Funktion $\arg z$ durch Wahl eines ihrer Zweige eindeutig machen. Das bedeutet Vorgabe von $y_0 \in \mathbb{R} : y_0 \leq \Theta < y_0 + 2\pi$. Wir betrachten 2 Beispiele:

- $y_0 = 0$, dh. $0 \leq \Theta < 2\pi$
- $y_0 = -\pi$ dh. $-\pi \leq 0 < \pi$, (diese Wahl heißt *Hauptzweig*).

Zweig mit $y_0 = 0$ also $0 \leq \Theta < 2\pi$:



Hauptzweig, $y_0 = -\pi$ also $-\pi \leq \Theta < \pi$:



2.1.2 Geometrische Deutung von Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$

Addition: Vektoraddition
Multiplikation komplexer Zahlen: Drehstreckung

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 \left[(\cos\Theta_1 \cos\Theta_2 - \sin\Theta_1 \sin\Theta_2) + \mathrm{i}(\cos\Theta_1 \sin\Theta_2 + \cos\Theta_2 \sin\Theta_1) \right] \\
&= r_1 r_2 \left[\cos(\Theta_1 + \Theta_2) + \mathrm{i} \sin(\Theta_1 + \Theta_2) \right]
\end{aligned}
$$

Daraus folgt: Beträge multiplizieren sich, Winkel werden addiert (modulo 2π).

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$

Beispiel. Betrachten zunächst den Zweig mit $y_0 = 0$ also $0 \leq \Theta < 2\pi$:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -1 \\
|z_1| &= 1 \\
\arg z_1 &= \pi \\
z_1 z_2 &= \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= -\mathrm{i} \\
|z_2| &= 1 \\
\arg z_2 &= 3\frac{\pi}{2} \\
|z_1 z_2| &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\arg z_1 z_2 &= \frac{\pi}{2} \\
\arg z_1 + \arg z_2 &= \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2} \\
(\arg z_1 + \arg z_2) \pmod{2\pi} &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Für Hauptzweig gilt unterschiedlich $\arg z_1 = -\pi$ und $\arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$ sowie $\arg z_1 z_2 = \frac{\pi}{2}$, wir verwendeten $-\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} = -2\pi + \frac{\pi}{2}$

Formel von de Moivre: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, dann gilt:

$$z^n = r^n \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

Beweis durch vollständige Induktion.

Wurzelziehen Sei $w \in \mathbb{C}$ gegeben, $w = r(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta)$. Gesucht sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = w$, dh $z = \sqrt[n]{w}$.

Ansatz:

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \quad ,\text{daher} \\ z^n &= \rho^n(\cos n\psi + \mathrm{i}\sin n\psi) \end{aligned}$$

Vergleiche:

$$\rho^n = r \qquad n\psi = \Theta + 2\pi k$$

damit

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)\right] \quad \text{mit } k = 0,1,2,...,n-1$$

Bemerkung. Für $k = 0,1,2,...,n-1$ sind die z_k verschieden!

Beispiel. $z^3 = 1$, gesucht $z = \sqrt[3]{1}$. $n = 3, w = 1, |w| = 1$ und $\arg w = 0$

$$z_k = \cos\frac{k}{3}2\pi + \mathrm{i}\sin\frac{k}{3}2\pi$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \cos\frac{2\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Beispiel. $z^2 = -1$, gesucht $z = \sqrt{-1}$. $n = 2, w = -1, r = 1$ und $\Theta = \pi$

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k}{2}2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k}{2}2\pi\right)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i} \\ z_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = -\mathrm{i} \end{aligned}$$

Bemerkung. $z \to \sqrt[n]{z}$ ist neuerliches Beispiel für eine mehrdeutige Funktion. Wir können auch diese Funktion eindeutig machen durch die Wahl eines *Zweiges* von $\sqrt[n]{z}$ (siehe später) oder die Verwendung sogenannter *Riemannscher Blätter* (wird in dieser Vorlesung nicht besprochen).

2.2 Wichtige Funktionen

2.2.1 Exponentialfunktion

Definition. Exponentialfunktion

Es sei

$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \quad \text{dann} \\ e^z &:= e^x \cdot (\cos y + \mathrm{i} \sin y) \end{aligned}$$

Eigenschaften:

1. $e^{z+w} = e^z e^w, \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$
2. $|e^{x+\mathrm{i}y} = e^x|$
3. $e^z \neq 0$

Beweis. (1)

Sei $z = x + \mathrm{i}y$, $w = s + \mathrm{i}t$.

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{x+s+\mathrm{i}(y+t)} \\ &= e^{x+s} \left[\cos{(y+t)} + \mathrm{i} \sin{(y+t)}\right] \\ &= e^x e^s \left[\cos y \cos t - \sin y \sin t + \mathrm{i}(\cos y \sin t + \sin y \cos t)\right] \\ &= \left[e^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y)\right] \left[e^s (\cos t + \mathrm{i} \sin t)\right] \\ &= e^z e^w \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} |e^{x+\mathrm{i}y}| &= |e^x e^{\mathrm{i}y}| = |e^x||e^{\mathrm{i}y}| \\ &= e^x |\cos y + \mathrm{i} \sin y| \qquad (\text{da } e^x > 0) \\ &= e^x \qquad (\text{da } \cos y^2 + \sin y^2 = 1) \end{aligned}$$

(3)

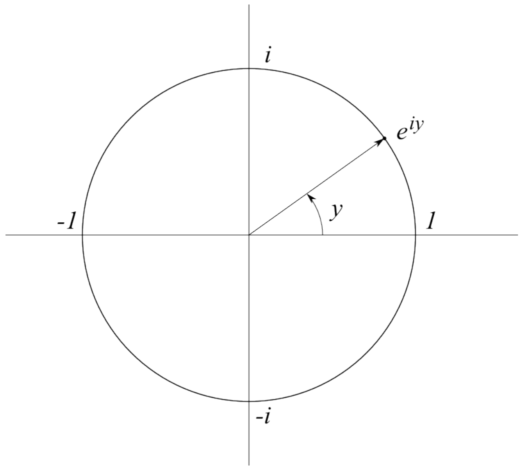
$$e^z \neq 0 \text{ da } |e^z| = e^x \neq 0$$

□

Bemerkung. Spezialfall $x = 0$

$$e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i} \sin y$$

Komplexe Zahl $e^{\mathrm{i}y}$ ist ein Punkt am Einheitskreis mit dem Argument y, periodisch unter $y \to y + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.



$$
\begin{aligned}
e^0 &= 1 \\
e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} &= \mathrm{i} \\
e^{\pi\mathrm{i}} &= -1 \\
e^{3\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} &= -\mathrm{i} \\
e^{2\pi\mathrm{i}} &= 1
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Polardarstellung wird nun auch

$$z = r(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta) = re^{\mathrm{i}\Theta} = |z|e^{\mathrm{i}\Theta} = |z|e^{\mathrm{i}\arg z}$$

2.2.2 Trigonometrische Funktionen

Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ $\cos z := \frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}$ $\sin z := \frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$

Eigenschaften:

1. $\sin z^2 + \cos z^2 = 1$
2. $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$
3. $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$

Beweis. (1)

$$1 = e^{\mathrm{i}z}e^{-\mathrm{i}z} = (\cos z + \mathrm{i}\sin z)(\cos z - \mathrm{i}\sin z) = \cos z^2 + \sin z^2$$

□

Bemerkung. Im Allgemeinen gilt **nicht**, dass $|\cos z| \leq 1$ ist. Wähle z.B. $z = \mathrm{i}x$ mit $x \in \mathbb{R}$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\cos z| &= \left|\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right| \\
&= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\
&= \cosh x \geq 1
\end{aligned}$$

Definition. Hyperbelfunktionen
Für $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\cosh z &:= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \\
\sinh z &:= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}
\end{aligned}$$

Eigenschaften z.B.: $\cosh z^2 - \sinh z^2 = 1$

2.2.3 Logarithmus

Betrachten

$$\begin{aligned}
z &= |z|e^{\mathrm{i}\arg z} = e^{\ln|z|}e^{\mathrm{i}\arg z} \\
&= e^{\ln|z|+\mathrm{i}\arg z} \\
&=: e^{\ln z}
\end{aligned}$$

Wir definieren $\ln z := \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$, erkennen jedoch, dass dies wegen der Mehrdeutigkeit von $\arg z$ eine mehrdeutige Funktion ist.

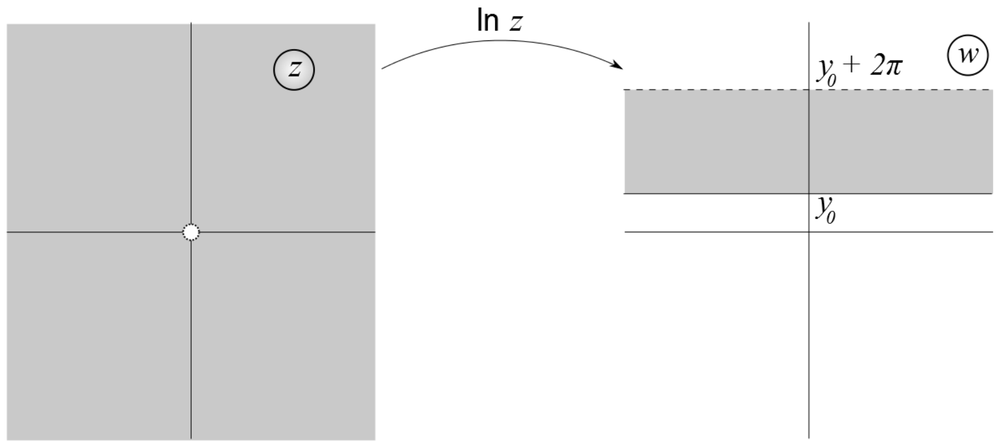
Wir definieren nun einen *Zweig* von $\ln z$ mittels der Wahl eines *Zweiges* von $\arg z$, damit wird $\ln z$ eine eindeutige Funktion. Insbesondere wird $\ln z$ eine eindeutige Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, siehe anschließend.

Definition. Zweig des Logarithmus

$$\ln z : \{z|\mathbb{C}\setminus\{0\}\} \to \{w|w = u + \mathrm{i}v;\ u, v \in \mathbb{R},\ y_0 \leq v \leq y_0 + 2\pi\}$$

$$z \to w = \ln z$$

$$\ln z := \ln|z| + \mathrm{i}\arg z, \quad \arg z \in [y_0, y_0 + 2\pi)$$



Beispiel. $y_0 = 0$

$$\begin{aligned} \ln(-1) &= \ln 1 + \mathrm{i}\pi = \mathrm{i}\pi \\ \ln(-\mathrm{i}) &= \ln 1 + \mathrm{i}\frac{3\pi}{2} = \mathrm{i}\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

$y = -\pi$

$$\begin{aligned} \ln(-1) &= \ln 1 - \mathrm{i}\pi = -\mathrm{i}\pi \\ \ln(-\mathrm{i}) &= \ln 1 - \frac{\pi}{2} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Behauptung. *Zweig des Logarithmus ist in folgendem Sinn eine Umkehrfunktion von e^z:*

1. *Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $e^{\ln z} = z$*
2. *Für $z = x + \mathrm{i}y$ wo $y \in [y_0, y_0 + 2\pi)$ gilt: $\ln e^z = z$*

Beweis. (1)

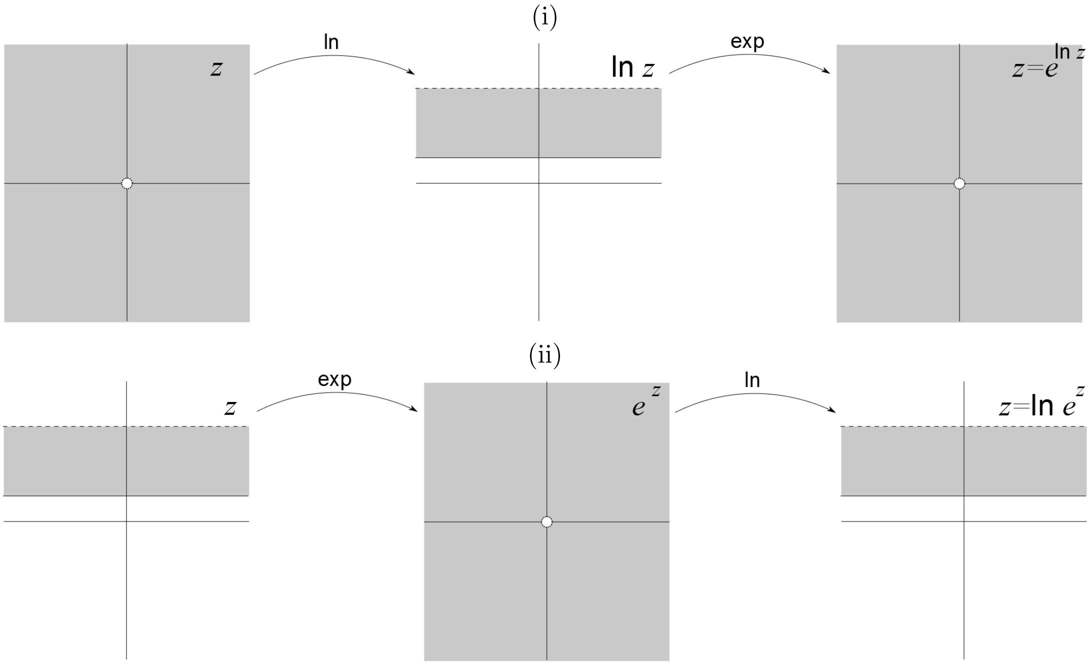
$$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + \mathrm{i}\arg z} = |z|e^{\mathrm{i}\arg z} = z$$

(2)

$$\begin{aligned} \ln e^z &= \underbrace{\ln|e^z|}_{\ln e^x} + \mathrm{i}\arg e^z \\ &= \underbrace{lne^x}_{x} + \mathrm{i}\underbrace{\arg e^x e^{\mathrm{i}y}}_{y} \\ &= x + \mathrm{i}y \end{aligned}$$

weil $\arg e^x e^{\mathrm{i}y} = \arg e^{\mathrm{i}y} = y$, wobei $y \in [y_0, y_0 + 2\pi)$ laut Wahl des Zweigens von $\arg z$. □

Graphisch:



Behauptung. *Wenn $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt für Zweig des* ln

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \qquad \mod 2\pi\mathrm{i}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\ln z_1 z_2 &= \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i} \underbrace{\arg z_1 z_2}_{\in[y_0, y_0+2\pi)} \\
&= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i} \underbrace{\arg z_1 z_2}_{\in[y_0, y_0+2\pi)}
\end{aligned}$$

von früher wissen wir schon:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad \mod 2\pi\mathrm{i}$$

Mit anderen Worten: $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + n \cdot 2\pi\mathrm{i}$, wo $n \in \mathbb{Z}$ so gewählt ist, dass $\mathrm{Im}(\ln(z_1 z_2)) \in [y_0, y_0 + 2\pi)$ □

Beispiel.

$$\ln((-1)(-1)) = \ln(-1) + \ln(-1) + ??$$

Betrachten z.B. $y_0 = 0$ und wissen schon, dass $\ln(-1) = \mathrm{i}\pi$.

$$\Rightarrow \ln((-1)(-1)) = \ln 1 = 0 = \underbrace{\ln(-1)}_{\mathrm{i}\pi} + \underbrace{\ln(-1)}_{\mathrm{i}\pi} - 2\mathrm{i}\pi$$

2.2.4 Komplexe Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und für einen Zweig des Logarithmus existiert eine eindeutige Definition von a^b.

Definition.
$$a^b := e^{b \cdot \ln a}$$

Beispiel. $(y_0 = 0)$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{\mathrm{i}} &= e^{\mathrm{i} \ln \mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \\ 2^{\mathrm{i}} &= e^{\mathrm{i} \ln 2} = \cos \ln 2 + \mathrm{i} \sin \ln 2 \end{aligned}$$

Beispiel. *Zweig* der n-ten Wurzel $\sqrt[n]{z}$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log z} = e^{\frac{1}{n}(\log r + \mathrm{i}\Theta)}$$

wo $\Theta \in [y_0, y_0 + 2\pi)$
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\mathrm{i}\frac{\Theta}{n}} \quad , \Theta \in [y_0, y_0 + 2\pi]$$

Beispiel. $y_0 = \pi$

$$1 = e^{\mathrm{i}2\pi} \Rightarrow \sqrt{1} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{2}} = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

Bemerkung. Im Allgemeinen ist $(ab)^c \neq a^c b^c$ da

$$\begin{aligned} (ab)^c &= e^{c(\ln(ab))} \\ &= e^{c(\ln a + \ln b + 2\pi \mathrm{i})} \\ &= a^c \cdot b^c \cdot e^{c2\pi \mathrm{i} n} \end{aligned}$$

2.3 Komplexe Differentiation

Definition. Sei $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$f(z)$ heißt *differenzierbar* in $z_0 \in G$, wenn für $h \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

eindeutig existiert.

$f(z)$ heißt *analytisch* ($\equiv$ *regulär*, $\equiv$ *holomorph*) in G, wenn $f(z) \quad \forall z \in G$ differenzierbar ist.

Bemerkung. Die Definition der komplexen Differenzierbarkeit ist wesentlich reichhaltiger als die analoge Definition im $\mathbb{R}^2$, wegen der speziellen Natur der Division komplexer Zahlen. Zur Erinnerung:

Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$: $\vec{f} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt *differenzierbar* in $\vec{x_0} \in G$ wenn eine 2x2 Matrix
$$A_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x} = \vec{x_0}}$$

existiert, sodass

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{|\vec{f}(\vec{x_0}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x_0}) - A\vec{h}|}{|\vec{h}|} = 0$$

Eine Division durch $\vec{h}$ ist nicht möglich, nur $|\vec{h}|$ erlaubt. Es muss Grenzwert $|\vec{h}| \to 0$ als Ganzes betrachtet werden!

Für $\mathbb{C}$: Eine Division durch eine komplexe Zahl h ist sehr wohl möglich. Ein beliebiges Annähern von $h \to 0$ trägt unterschiedlich bei! Daraus folgt, dass die Eindeutigkeit des Grenzwertes in $\mathbb{C}$ im Vergleich zum $\mathbb{R}^2$ einschränkender ist. Dies zeichnet differenzierbare Funktionen besonders aus, zum Beispiel ist jede analytische Funktion unendlich oft differenzierbar (siehe später).

Satz. *Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. Wenn $f(z)$ in z_0 differenzierbar ist, so gelten in z_0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ *und*

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bigg|_{x_0,y_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{x_0,y_0}$$

Beweis. $z_0 := x + \mathrm{i}y_0$, $h := s + \mathrm{i}t$, $f := u + \mathrm{i}v$. Wegen der Eindeutigkeit der Differentiation können wir zwei Spezialfälle gleichsetzen:

$$\lim_{s\to 0, t=0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{s} = \lim_{t\to 0, s=0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{\mathrm{i}t} = f'(z_0)$$

linke Seite:

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{u(x_0+s,y_0) + \mathrm{i}v(x_0+s,y_0) - u(x_0,y_0) - \mathrm{i}v(x_0,y_0)}{s} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

rechte Seite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{\mathrm{i}t} = -\mathrm{i}\lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t) + \mathrm{i}v(x_0,y_0+t) - u(x_0,y_0) - \mathrm{i}v(x_0,y_0)}{t} = -\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

also $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

□

Satz. *Wenn $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in z_0* ***stetige*** *partielle Ableitungen* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ *besitzt (wo $f = u + \mathrm{i}v$)* ***sowie*** *die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, so ist f in z_0 differenzierbar. Es gilt dann*

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bigg|_{x_0,y_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{x_0,y_0}$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen gilt für s, t infinitesimal klein:

$$\begin{aligned} u(x+s, y+t) - u(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + ... \\ v(x+s, y+t) - v(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t + ... \end{aligned}$$

Sei $z = x + \mathrm{i}y$, $h = s + \mathrm{i}t$, $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= u(x+s, y+t) - u(x,y) + \mathrm{i}(v(x+s,y+t) - v(x,y)) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot s + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\text{Mit CR-DGL:}\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)} \cdot t + ... \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (s + \mathrm{i}t) + ... \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot h + ... \end{aligned}$$

Somit ist

$$f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

□

Beispiel. $f(z) = z^2$ ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$

Beweis. $f = (x + \mathrm{i}y)(x + \mathrm{i}y) = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{\mathrm{i}2xy}_{v}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$
$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$

Stetige partielle Ableitungen, erfüllen die CR-Dgl, und somit
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + \mathrm{i}2y = 2z$ □

Beispiel. $f = z^*$ ist nicht analytisch. $f = x - \mathrm{i}y \Rightarrow u = x, v = -y$ Damit folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Die CR-Dgl werden verletzt.

Satz. *Seien f, g analytisch in $G \subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

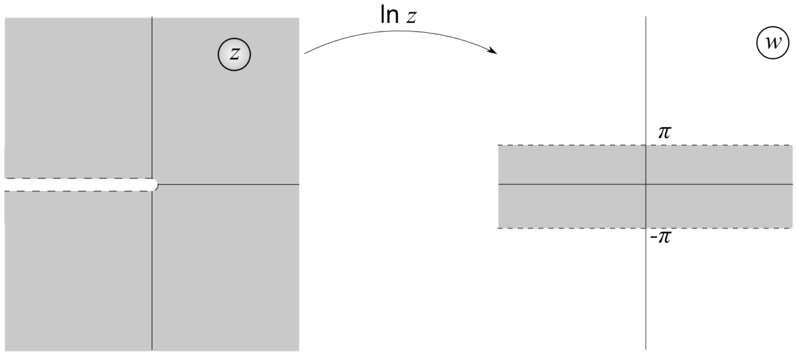
1. $(af + bg)' = af' + bg'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. *Wenn* $g(z) \neq 0\ \forall z \in G$ *dann* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. *Ist f analytisch in $A \subset \mathbb{C}$, und g analytisch in $B \subset \mathbb{C}$ mit $f(A) \subset B$, dann ist* $g(f(z))' = g'(f(z))f'(z)$ *(Kettenregel)*

(ohne Beweis, da analog zum Beweis im Reellen)

Bemerkung. Die Definition des Zweiges des Logarithmus hat zwar das Problem der Mehrdeutigkeit behoben, dafür aber ein Problem mit **Unstetigkeit** eingehandelt!

Beispiel. Für die Wahl des Zweiges $y_0 = -\pi$ gibt es bei $z = -x \pm \mathrm{i}\epsilon$, $x > 0$, einen Sprung von $\ln z$ um $-2\pi\mathrm{i}$. $\Rightarrow$ weitere Einschränkung für die Wahl des Zweiges notwendig:

Definition. Hauptzweig des Logarithmus $\ln z : \underbrace{\mathbb{C} \setminus \{x + \mathrm{i}y | x \leq 0, y = 0\}}_{\mathbb{C} \text{ ohne negative reelle Achse}} \to \{w | w = u + \mathrm{i}v; u, v \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$



$$\ln z = \ln |z| + \mathrm{i} \cdot \arg z, \text{ wo} - \pi < \arg z < \pi$$

Es gilt: Der Hauptzweig des Logarithmus ist auf $\mathbb{C} \setminus \{x + \mathrm{i}y | x \leq 0, y = 0\}$ analytisch und

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

Beweis. Auf $\mathbb{C} \setminus \{x + \mathrm{i}y | x \leq 0, y = 0\}$ ist $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, $\Theta = \arctan \frac{y}{x}$ mit $-\pi < \Theta < \pi$ partiell stetig nach x, y differenzierbar.

$f = \ln z = \underbrace{\ln r}_{u} + \mathrm{i} \underbrace{\Theta}_{v}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{x}{r} = \frac{x}{r^2} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \arctan \frac{y}{x}}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{r^2} \\
-\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{r^2}
\end{aligned}$$

$$(\ln z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{r^2} - \mathrm{i}\frac{y}{r^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{r^2} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{1}{z}$$

□

Beispiel. $f(z) = z^b$ mit $b \in \mathbb{C}$ ist auf dem Definitionsbereich des Hauptzweiges des Logarithmus analytisch und $(z^b)' = b \cdot z^{b-1}$.

Beweis. $z^b = e^{b \ln z}$ ist analytisch, wo $\ln z$ analytisch ist (wegen Kettenregel).

$$\begin{aligned} (z^b)' &= (e^{b \ln z})' = e^{b \ln z}(b \ln z)' \\ &= z^b \cdot \frac{b}{z} = b \cdot z^{b-1} \end{aligned}$$

□

2.4 Komplexe Integration

2.4.1 Kurvenintegral

Sei f eine stetige Funktion $G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Sei $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine (stückweise stetig differenzierbare) Kurve in $G \subset \mathbb{C}$ mit Parameterdarstellung $z(t)$.

Definition. Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt$$

Bemerkung. Diese Definition passt mit der Definition des reellen Kurvenintegrals zusammen:

$$\begin{aligned} \int_\gamma f dz &= \int_\gamma (u + \mathrm{i}v) \cdot (dx + \mathrm{i}dy) \\ &= \underbrace{\int_\gamma (udx - vdy)}_{\text{reelles Kurvenintegral}} + i \underbrace{\int_\gamma (vdx + udy)}_{\text{reelles Kurvenintegral}} \\ &\stackrel{!}{=} \int_{t_0}^{t_1} (u\dot{x} - v\dot{y})dt + \mathrm{i} \int_{t_0}^{t_1} (v\dot{x} + u\dot{y})dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (u + \mathrm{i}v)(\dot{x} + \mathrm{i}\dot{y})dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f \frac{dz}{dt} dt \end{aligned}$$

Beispiel. $f(z) = z^*$
$\gamma : z(t) = t^2 + \mathrm{i}t$ mit $t \in [0, 2]$

$\Rightarrow f(z(t)) = t^2 - \mathrm{i}t$
$\dot{z} = 2t - \mathrm{i}t$

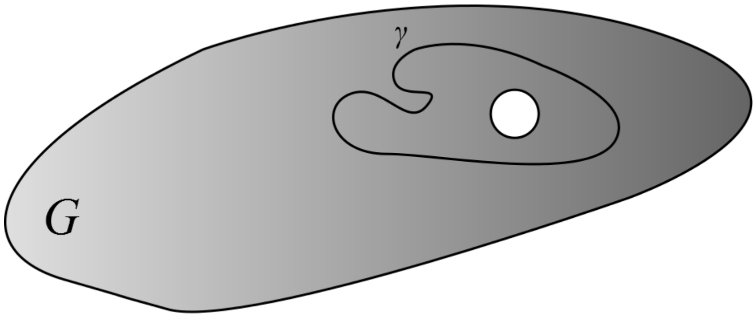
$\int_\gamma f dz = \int_0^2 (t^2 - \mathrm{i}t)(2t + \mathrm{i})dt = \int_0^2 (2t^3 + t)dt - \mathrm{i} \int_0^2 t^2 dt = 10 - \frac{8}{3}\mathrm{i}$

Satz. *Sei $F(z)$ in $G \subset \mathbb{C}$ analytisch und sei $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Kurve von z_0 nach z_1 sowie sei $\gamma \in G$.*
Dann gilt unabhängig von der Wahl des Weges γ

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Für geschlossene Kurven γ (dh. wenn $z_0 = z_1$) gilt

$$\oint_\gamma F'(z)dz = 0$$



Beweis. $F' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F'dz &= \text{analog zu vorher} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} - \overbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}^{\overset{!}{=}\frac{\partial u}{\partial y}}\dot{y})dt + \mathrm{i}\int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{\overset{!}{=}\frac{\partial v}{\partial y}}\dot{y}) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \dot{u}dt + \mathrm{i}\int_{t_0}^{t_1} \dot{v}dt \\
&= u(t_1) - u(t_0) + \mathrm{i}v(t_1) - \mathrm{i}v(t_0) \\
&= F(z_1) - F(z_0)
\end{aligned}$$

Ist die Kurve geschlossen so ist $z_1 = z_0 \Rightarrow \oint_\gamma F'(z)dz = 0$ □

Beispiel. γ: Ellipse $|z-3| + |z+3| = 10$ mit $z_0 = 5$ und $z_1 = 4\mathrm{i}$

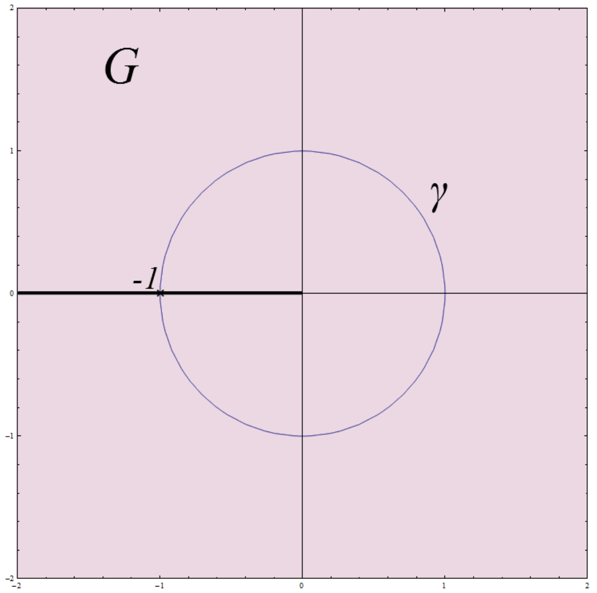
$$\int_\gamma z^3 dz = \frac{z^4}{4}\bigg|_5^{4\mathrm{i}} = \frac{(4\mathrm{i})^4}{4} - \frac{5^4}{4} = -\frac{369}{4}$$

$z^3 = \left(\frac{z^4}{4}\right)'$ ... brauchen die Parametrisierung der Kurve nicht!

Beispiel. γ: Kreis um Ursprung

$\oint_\gamma \frac{1}{z}dz \qquad (= 0\ ???)$

Die Voraussetzungen des vorigen Satzes sind **nicht** gegeben! Zwar ist $\frac{1}{z} = (\ln z)'$, aber $\ln z$ **ist nicht auf ganz** γ **analytisch** (nämlich bei $z = -1$ nicht) $\Rightarrow \gamma \not\subset G = \mathbb{C} \setminus$ negative reelle Achse.



explizite Rechnung:

$$\begin{aligned}
\gamma : z(t) &= re^{\mathrm{i}t} \qquad t \in [0, 2\pi] \text{ Kreis um Ursprung} \\
\dot{z} &= \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{1}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{\mathrm{i}t}} \cdot \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t} dt \\
&= \mathrm{i} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathrm{i} \qquad \text{Sehr wichtiges Ergebnis!!}
\end{aligned}$$

Beispiel. Sei γ ein Kreis um den Ursprung mit Radius r.

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 0$$

Der vorige Satz ist in diesem Fall **anwendbar**:
$\frac{1}{z^2} = (-\frac{1}{z})'$ und es existiert ein Gebiet G wo $(-\frac{1}{z})$ analytisch ist **und** $\gamma \in G$ liegt. Ein Beispiel für G wäre z.B. das Äußere eines Kreises um den Ursprung mit Radius $\frac{r}{2}$.

Explizite Rechnung:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{1}{z^2} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 e^{2\mathrm{i}t}} \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t} dt \\
&= \frac{\mathrm{i}}{r} \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}t} dt \\
&= \frac{\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}}{r} e^{-\mathrm{i}t} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{r}(1-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wann ist nun eigentlich immer $\oint f dz = 0$?

2.4.2 Cauchyscher Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein *einfach zusammenhängendes Gebiet.* Ist $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch in G, dann gilt

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

für jeden (stückweise stetigen) geschlossenen Weg $\gamma \in G$.

Wir beweisen nur (da leichter): Sei f analytisch mit **stetigen partiellen** Ableitungen im einfach zusammenhängenden Gebiet G dann ist $\oint f dz = 0$.

Beweis. Dieser erfolgt mittels des Stokeschen Satzes der reellen Analysis.

$$\text{Aus } \mathrm{rot}\vec{F} = 0 \text{ folgt auf einfach zusammenhängendem Gebiet} \Rightarrow \oint_\gamma \vec{F} d\vec{x} = 0$$

Zunächst betrachten wir

$$\oint_\gamma f dz = \oint_\gamma \overbrace{(udx - vdy)}^{=:\vec{F}d\vec{x}} + \mathrm{i} \oint \overbrace{(udy + vdx)}^{=:\vec{G}d\vec{x}}$$

Wegen der CR Dgl. folgt sogleich $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$ sowie $\mathrm{rot}\vec{G} = 0$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathrm{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathrm{rot}\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Wir wenden den Stokesschen Satz sowohl für $\vec{F}$als auch für $\vec{G}$ an

$$\Rightarrow \oint_\gamma f dz = 0$$

□

Beispiel. $\int_{\text{Einheitskreis um } 0} (\sinh z)^2 dz = 0$

Bemerkung. Auch folgende Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes ist gültig:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein nicht notwendigerweise einfach zusammenhängendes Gebiet, sei $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch in G, dann gilt

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

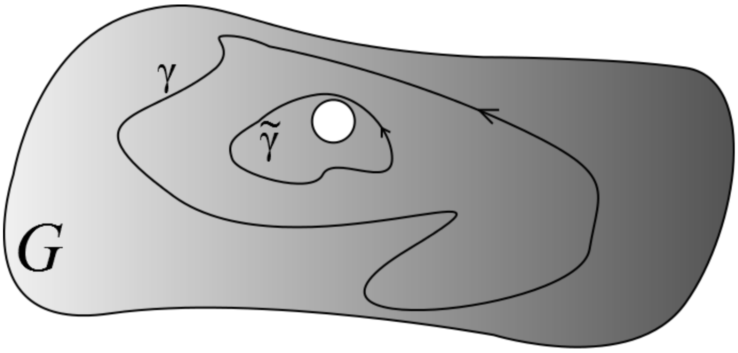
für jeden (stückweise stetigen) geschlossenen Weg γ, der in einem **einfach zusammenhängendem Teilgebiet** von G liegt.

2.4.3 Deformations Theorem

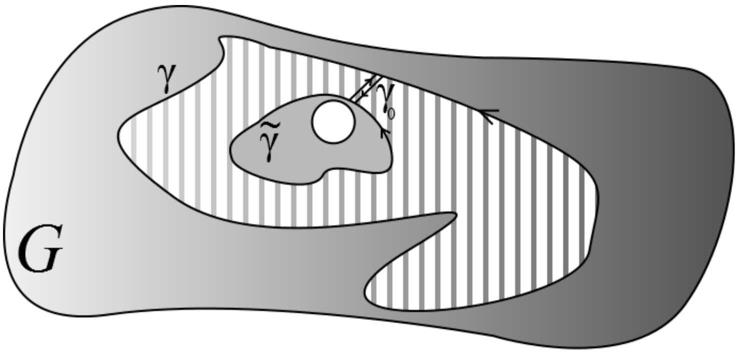
Sei f analytisch in einem (nicht notwendigerweise einfach zusammenhängenden) Gebiet G und sei γ eine geschlossene Kurve in G. Angenommen man kann γ in eine andere geschlossene Kurve $\tilde{\gamma}$ stetig deformieren (ohne G zu verlassen) dann gilt:

$$\oint_{\gamma} f dz = \oint_{\tilde{\gamma}} f dz$$

Konvention: γ und $\tilde{\gamma}$ sind gegen den Uhrzeigersinn orientiert.



Beweis. Wir fügen das Wegstück γ_0 hinzu und erhalten die Kurve $\gamma + \gamma_0 - \tilde{\gamma} - \gamma_0$. Der gestrichelte Zwischenbereich ist einfach zusammenhängend, f ist dort analytisch, es gilt also der Cauchysche Integralsatz.



$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \oint_{\gamma+\gamma_0-\tilde{\gamma}-\gamma_0} f dz \\ &= \oint_{\gamma} f dz + \int_{\gamma_0} f dz - \oint_{\tilde{\gamma}} f dz - \int_{\gamma_0} f dz \end{aligned}$$

und somit

$$0 = \oint_{\gamma} f dz - \oint_{\tilde{\gamma}} f dz$$

□

Beispiel. $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit γ einer geschlossenen Kurve um 0.

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz \overset{\text{Deformations Theorem}}{=} \oint_{\text{Kreis um } 0} \frac{1}{z} dz = \overbrace{2\pi \mathrm{i}}^{\text{wissen wir schon}}$$

2.4.4 Cauchysche Integralformel

Satz. *Sei f analytisch in einem (nicht notwendigerweise einfach zusammenhängenden) Gebiet G, sei $z_0 \in G$, sei γ eine um z_0 herumgehende Kurve in einem **einfach zusammenhängenden Teilgebiet** von G. Dann gilt:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Bemerkung. Diese Gleichung besagt, dass die Werte von f auf γ **alle** Werte von f **innerhalb von** γ festlegen!

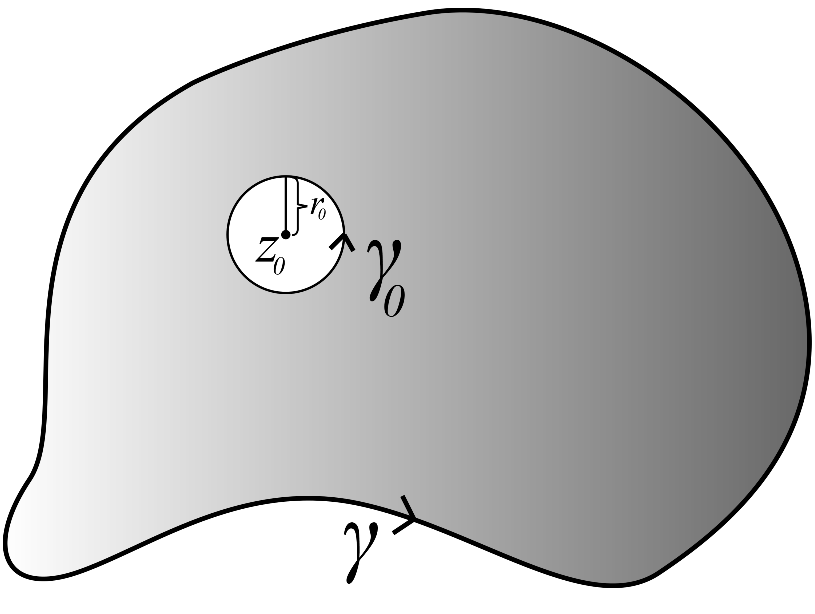
Beweis. Betrachten zuerst

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

g ist analytisch in $G \setminus \{z_0\}$ und in z_0 stetig. Dies gilt, weil f in z_0 differenzierbar ist und als Folge davon auch dort stetig ist. Wir wollen anfänglich zeigen, dass

$$\oint_\gamma g \; dz = 0$$

und verwenden dafür das *Deformationstheorem*



$$\oint_\gamma g \; dz = \oint_{\gamma_0} g \; dz$$

wobei γ_0 ein infinitesimal kleiner Kreis mit Radius r_0 um z_0 ist.

Da g stetig in z_0, ist es innerhalb von γ_0 beschränkt.

$$\left| \int_{\gamma_0} g \; dz \right| \leq \text{konst} \cdot \underbrace{2\pi r_0}_{\text{Umfang von } \gamma_0} \to 0 \qquad \text{für } r_0 \to 0$$

Somit

$$\begin{aligned}
0 &= \oint_\gamma g\,dz = \oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \\
0 &= \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\underbrace{\oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0}}_{2\pi\mathrm{i}}
\end{aligned}$$

und damit

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

□

Beispiel. Wir überprüfen die Cauchysche Integralformel für $f(z) = z^2$, diese Funktion ist - wie wir wissen - analytisch auf ganz $\mathbb{C}$. Sei $z_0 = \mathrm{i} \to f(\mathrm{i}) = -1$. Für γ wählen wir eine beliebige geschlossene Kurve um $z_0 = \mathrm{i}$.

Cauchysche Integralformel:

$$\begin{aligned}
f(i) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\text{Kreis um i}} \frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\,dz
\end{aligned}$$

$z(t) = \mathrm{i} + re^{\mathrm{i}t}$
$\dot{z}(t) = r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}$

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{i}) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\int_0^{2\pi} \frac{(\mathrm{i}+re^{\mathrm{i}t})^2\mathrm{i}\,re^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}+re^{\mathrm{i}t}-\mathrm{i}}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathrm{i}^2 + \underbrace{2\mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}}_{\to 0} + \underbrace{r^2e^{2\mathrm{i}t}}_{\to 0}\right)\,dt \\
&= -1
\end{aligned}$$

2.4.5 Cauchysche Integralformel für Ableitungen

Satz. ***Cauchysche Integralformel für Ableitungen*** *Sei f analytisch in einem (nicht notwendigerweise einfach zusammenhängenden) Gebiet G. Sei $z_0 \in G$ und γ eine um z_0 herumgehende Kurve in einem* ***einfach zusammenhängendem Teilgebiet*** *von G. Dann gilt*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Bemerkung. Die Cauchysche Integralformel für Ableitungen impliziert, dass jede analytische Funktion f beliebig hohe Ableitungen besitzt!

Bemerkung. Merkregel: $f^{(n)}(z_0)$ stimmt mit formalem n-fachen Differenzieren der Cauchyschen Integralformel nach z_0 überein.

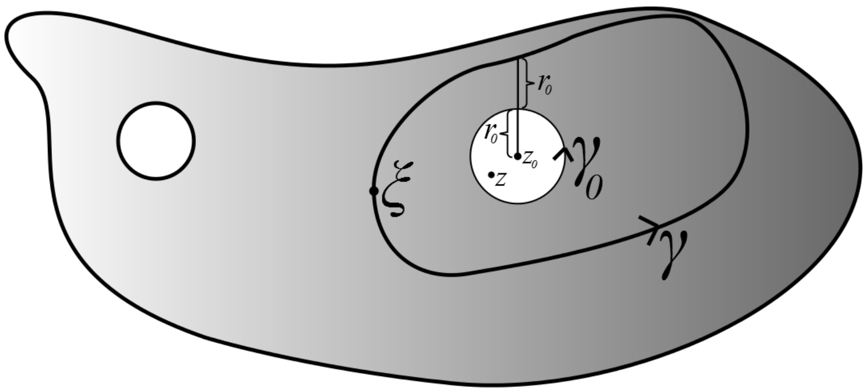
z.B. folgt aus

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \Rightarrow$$

durch Differenzieren nach z_0

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{df(z_0)}{dz_0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma f(z) dz \frac{d}{dz_0} \left(\frac{1}{z-z_0} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^2} \end{aligned}$$

Beweis der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen:



Sei γ_0 so gewählt, dass der kürzeste Abstand um γ_0 zu γ gerade r_0 ist; sei z innerhalb γ_0. Dann gilt $|z - z_0| \leq r_0$, bzw. $-|z-z_0| \geq -r_0$. Für ξ auf γ gilt $|\xi - z_0| \geqslant 2r_0$.
Weiters

$$|\xi - z_0| = |\xi - z + z - z_0| \leq |\xi - z| + |z - z_0|$$

sodass

$$|\xi - z| \geq |\xi - z_0| - |z - z_0| \geq 2r_0 - r_0 = r_0$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\xi - z_0|} &\leq \frac{1}{2r_0} \\ \frac{1}{|\xi - z|} &\leq \frac{1}{r_0} \end{aligned}$$

Zeigen nun dass

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^2} \right] = 0$$

Zu diesem Zwecke betrachten wir diese Größe mittels Cauchyscher Integralformel

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma f(\xi) d\xi \underbrace{\left[\frac{1}{z-z_0} \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0} \right) - \frac{1}{(\xi - z_0)^2} \right]}_{\frac{z-z_0}{(\xi-z)(\xi-z_0)^2}}$$

Weil f auf γ analytisch ist, ist es auf γ durch eine Konstante beschränkt, daraus folgt mit den Ungleichungen für $\frac{1}{|\xi - z_0|}$, $\frac{1}{|\xi - z|}$ dass

$$\left| \frac{z - z_0}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)^2} \right| \leq \frac{|z - z_0| \cdot \mathrm{const} \cdot \mathrm{Umfang}(\gamma)}{2\pi 4 r_0^3}$$

Wenn wir nun von obigem Ausdruck den $\lim_{z \to z_0}$ nehmen, verschwindet dieser, q.e.d.

Beispiel. Sei γ Einheitskreis um 0.

$$\oint_\gamma \frac{\sin z}{z^2} dz = ?$$

$$\begin{aligned} (\sin z)' \Big|_{z=0} &= \cos z \Big|_{z=0} = 1 \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{\sin z}{z^2} dz \quad \Rightarrow \\ \oint_\gamma \frac{\sin z}{z^2} dz &= 2\pi \mathrm{i} \end{aligned}$$

Bemerkung. Der Beweis der Cauchyschen Integralformel für höhere Ableitungen erfolgt mittels vollständiger Induktion!

2.5 Reihenentwicklungen

2.5.1 Grundlagen zu Reihenentwicklungen

Im **Reellen:**

- Eine differenzierbare Funktion muß nicht beliebig oft differenzierbar sein, also muß nicht notwendigerweise die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n$ existieren. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \geq 0 \\ -x^2 & : x \leq 0 \end{cases}$$

  Diese ist einmal differenzierbar mit $f'(x) = 2|x|$ aber eine zweite Ableitung existiert nicht.

- Selbst wenn die Taylorreihe existiert, muß diese **nicht notwendigerweise** gegen die **vorgegebene Funktion konvergieren**.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

  Nun ist $f'(x) = \frac{1}{2x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0$ (für $x \to 0$) und sogar alle Taylorkoeffizienten $f^{(n)}(x) \to 0$ (für $x \to 0$), sodass die Taylorreihe von $f(x)$ in jeder Umgebung von 0 verschwindet. Die Taylorreihe gibt $f(x)$ also nicht richtig wieder!

Im **Komplexen:** Wenn f analytisch ist, dann existieren beliebig hohe Ableitung und die Taylorreihe konvergiert immer gegen f.

Satz. *Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, wobei $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, besitzt einen eindeutigen Konvergenzradius R (auch $R = \infty$ ist erlaubt), wobei für $|z - z_0| < R$* ***gleichmäßige*** *und* ***absolute*** *Konvergenz*

vorliegt, bzw. für $|z - z_0| > R$ Divergenz besteht.
(ohne Beweis, analog zum Beweis im Reellen)

Bemerkung. Konvergenzradius berechnet sich gemäß

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

oder

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad R = \frac{1}{g}$$

Beispiel. Für $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist $R = 1$ da $a_n = 1$.

Definieren die Begiffe gleichmäßige und absoluter Konvergenz:

Definition. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen $f(z)$, wenn für $S_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_0)^k$

$$|S_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall |z - z_0| < R \text{ und } \forall n > N_\epsilon$$

gilt. Die Potenzreihe **konvergiert absolut**, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n| < \infty$$

Beispiel. Anstelle eines allgemeinen Beweises über die Konvergenz von Potenzreihen beweisen wir ein wichtige Beispiel, nämlich dass $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ innerhalb des offenen Einheitskreises gegen die analytische Funktion $\frac{1}{1-z}$ konvergiert. Die Konvergenz ist absolut und gleichmäßig.

Beweis. Wissen bereits, dass $R = 1$, da $a_n = 1 \Rightarrow$ also sei z innerhalb des offenen Einheitskreises $|z| \leq r, r < 1$ gelegen. Verwenden das Weierstrasssche Majorantenkriterium für $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$:

$$|z^n| = |z|^n \leq r^n \quad \text{wo } 0 \leq r < 1$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergiert, konvergiert nun $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ absolut und gleichmäßig. $\square$

Was ist der Grenzwert von $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$?

Verwenden Trick: $1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}$ sodass

$$\left| \frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0 \quad (\text{für } n \to \infty)$$

wobei

$$1 = |1 - z + z| \leq |1 - z| + |z| \leq |1 - z| + r$$

$$1 - r \leq |1 - z|$$

$$\frac{1}{|1-z|} \leq \frac{1}{1-r}$$

verwendet wurde.

Satz. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *ist* ***analytisch*** *innerhalb des Konvergenzradius.*
(ohne Beweis)

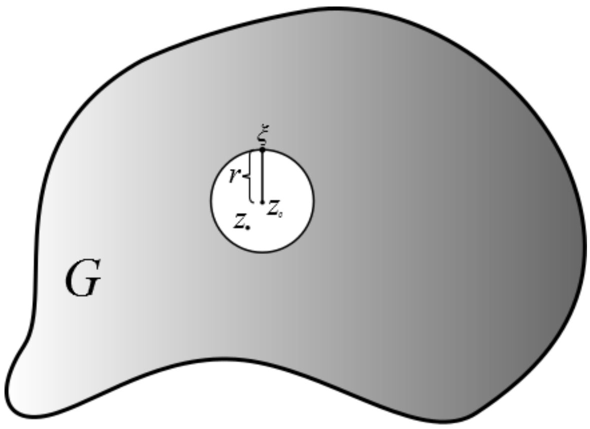
Satz. *Gliedweise Differentiation und Integration der Potenzreihe ist innerhalb des Konvergenzradius erlaubt (ohne Beweis).*

2.5.2 Taylor Reihe

Satz. ***Taylor Reihe***
Sei f analytisch in G, sei $z_0 \in G$ und γ ein Kreis mit Radius r um $z_0 \in G$. Dann gilt für alle z im Inneren des Kreises

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

und der Konvergenzradius R erfüllt $R \geq r$.



Beweis. (für $z_0 = 0$) Sei γ ein Kreis um z_0 und sei z im Inneren des Kreises.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma f(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi$$

wobei

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}}$$

Da $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$ gilt

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

Konvergenz ist - wie wir bewiesen haben - gleichmäßig und absolut.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\
&\quad \text{(Die Konvergenz ist gleichmäßig und absolut, daher ist gliedweise Integration erlaubt!)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi}_{\text{C.I.F. für Ableitungen}} \Rightarrow \\
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n
\end{aligned}
$$

□

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= e^z \text{ und } z_0 = 0 \\
f'(z) &= e^z = f''(z) = ... \\
f'(0) &= 1 \\
f''(0) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad a_n = \frac{1}{n!}
$$

$$
e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{sowie berechnen wir } R = \infty
$$

Dies passt perfekt zur Definition $e^z = e^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y)$ von früher (siehe ÜM1).

Beispiel. $f(z) = \ln(1 + z)$

$z_0 = 0$, dort ist $f(t)$ analytisch und $f(0) = 0$.

$f'(z) = \frac{1}{1+z}$	$f'(0) = 1$
$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}$	$f'''(0) = 2$
$f^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(z+1)^n}$	$f^{(n)}(0) = (n-1)!(-1)^{n-1}$

Taylor Reihe: $\ln(1 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$

Wir berechnen sofort $R = 1$

Bemerkung. Anstatt die explizite Taylorreihenentwicklung vorzunehmen, ist es oft einfacher, die Formel für geometrische Reihe, Produktformel oder Partialbruchentwicklung zu verwenden.

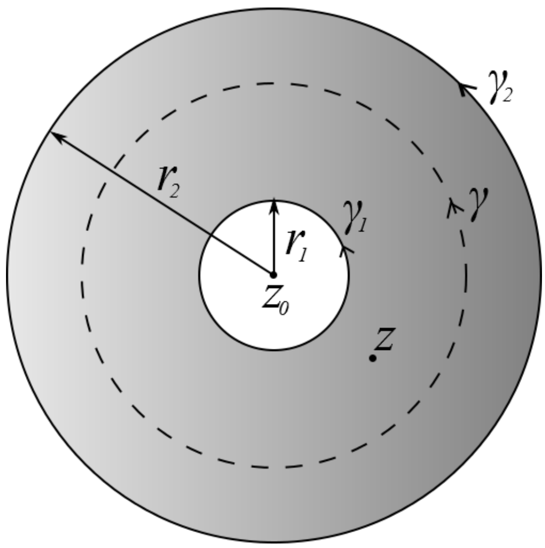
Beispiel.

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{1-z} &= \frac{1}{1-z}e^z = \overbrace{(1+z+z^2+...)}^{\text{Geom. Reihe}} \cdot \overbrace{(1+z+\frac{z^2}{2}+...)}^{e^z} \\ &= \quad ... = 1+2z+\frac{5z^2}{2}+...\end{aligned}$$

$R = 1$

2.5.3 Laurent Reihe

Satz. ***Laurent Reihe***
*Sei f analytisch in einem **Kreisring** G um z_0, $r_1 < |z-z_0| < r_2$. wo $z \in G$, $\Rightarrow \nexists$ Taylorreihe, jedoch eine Laurent Reihe.*



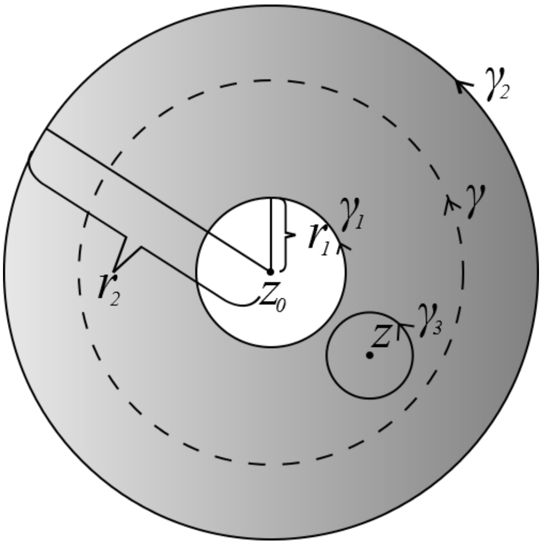
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, $n \in \mathbb{Z}$ und wo γ ein Kreis um z_0 mit Radius r mit $r_1 < r < r_2$ ist.

Bemerkung. Für den Fall, dass$f$ innerhalb von γ_1 nicht analytisch ist und die Laurentreihenentwicklung betrachtet wird, darf man **nicht** die Cauchysche Integralformel für Ableitungen verwenden (laut Voraussetzung existiert $f^{(n)}(z_0), n > 0$ nicht).

Bemerkung. Die Laurentreihenentwicklung enthält als Spezialfall die Taylorreihenentwicklung: Wenn f auch innerhalb von γ_1 analytisch ist, so sind einerseits $a_{-1} = a_{-2} = ... = 0$ (dies folgt mittels Cauchyschen Integralsatzes aus $\oint_\gamma f(\xi)(\xi - z_0)^k d\xi = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...$), andererseits darf man die Cauchysche Integralformel für Ableitungen verwenden.

Beweis. Für den Bewies der Laurentreihenentwicklung führen wir für eine Hilfsüberlegung einen Kreis γ_3, der um z herumführt, ein.



Verwenden das Deformationstheorem

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi_2)}{\xi_2 - z}d\xi_2 \overbrace{=}^{\text{Def. Theorem}} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi_1)}{\xi_1 - z}d\xi_1 + \underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_3}\frac{f(\xi_3)}{\xi_3 - z}d\xi_3}_{\text{C.I.F.: } f(z)}$$

Da $f(z)$ innerhalb γ_3 analytisch ist, dürfen wir wir die Cauchysche Integralformel verwenden

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi_2)}{\xi_2 - z}d\xi_2 - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi_1)}{\xi_1 - z}d\xi_1$$

z **innerhalb** γ_2:

$$\frac{1}{\xi_2 - z} = \frac{1}{\xi_2 - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi_2 - z_0}} = \frac{1}{\xi_2 - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi_2 - z_0}\right)^n$$

z **außerhalb** γ_1:

$$\frac{1}{\xi_1 - z} = -\frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\xi_1 - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi_1 - z_0}{z - z_0}\right)^n$$

Gliedweise Integration $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi_2)d\xi_2}{(\xi_2 - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_1} f(\xi_1)d\xi_1(\xi_1 - z_0)^n(z - z_0)^{-n-1}}_{\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi_1)d\xi_1}{(\xi_1 - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n \qquad \text{mittels Deformationstheorem} \end{aligned}$$

Hier ist γ ein beliebiger Kreis zwischen γ_1 und γ_2. □

Bemerkung. Anstatt die explizite Laurentreihenentwicklung vorzunehmen, ist es oft einfacher, die Formel für geometrische Reihe, Produktformel oder Partialbruchentwicklung zu verwenden.

Beispiel.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{z-1} \qquad 0<|z|<1\,, z_0=0 \\
f(z) &= \frac{1}{z}(-1)\overbrace{\frac{1}{1-z}}^{\text{geom. Reihe}} = -\frac{1}{z}(1+z+z^2+...) \\
&= -(\frac{1}{z}+1+z+z^2+...)
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
f(z) &= (\text{Partialbruchentwicklung}) = -\frac{1}{z} - \overbrace{\frac{1}{1-z}}^{\text{geom. Reihe}} = -\frac{1}{z} - (1+z+z^2+...) \\
&= -(\frac{1}{z}+1+z+z^2+...)
\end{aligned}$$

Wir lesen z.b. ab, dass $a_{-2}=0$, $a_{-1}=-1$, ... Explizit berechnen wir mittels der Formel für Laurentreihenentwicklung z.B. a_{-2} und a_{-1}

$$\begin{aligned}
a_{-2} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\text{Kreis um 0, } 0<r<1} \underbrace{\frac{dw}{w(w-1)w^{-1}}}_{\text{analytisch innerhalb des Kreises}} \overbrace{=}^{\text{C.I.S}} 0 \\
a_{-1} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\text{Kreis um } 0,0<r<1} \frac{dw}{w(w-1)} \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}}{re^{\mathrm{i}t}(re^{\mathrm{i}t}-1)}dt \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-re^{\mathrm{i}t}} = \text{(siehe ÜM1)=-1}
\end{aligned}$$

2.6 Residuensatz

2.6.1 Pol k-ter Ordnung

Definition. Pol k-ter Ordnung in z_0: Hat $f(z)$ bei z_0 die Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Definiert dies einen Pol **k-ter Ordnung** in z_0.

Definition. $k=\infty$ heißt **wesentliche** Singularität.

Beispiel. $f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{z-1}$ hat Pol 1. Ordnung in $z_0=0$, da $f(z)=-(\frac{1}{z}+1+z+...)$ sowie analog einen Pol 1. Ordnung in $z_0=1$

Beispiel. $f(z)=\frac{5-\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^3}$ hat einen Pol 3.ter Ordnung in $z_0=-\mathrm{i}$

Beispiel. $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$ hat Pol 1.ter Ordnung in $z_0 = \mathrm{i}$ und Pol 1.ter Ordnung in $z_0 = -\mathrm{i}$. Nochmals genauere Untersuchung mittel Laurentreihe um $z_0 = \mathrm{i}$, $0 < |z - \mathrm{i}| < 2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\underbrace{\frac{1}{z-\mathrm{i}}}_{\text{Pol 1. Ordnung}} - \frac{1}{2\mathrm{i}} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} - \ldots\right)
\end{aligned}$$

Beispiel. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ hat **keinen** Pol in $z_0 = 0$, denn

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3} + \ldots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3} + \ldots$$

Beispiel. $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ldots$ hat wesentliche Singularität bei $z_0 = 0$

2.6.2 Residuensatz

Definition. a_{-1} heißt Residuum von f an der Stelle z_0.

$$a_{-1} \equiv \mathrm{Res}(f, z_0)$$

Satz. ***Residuensatz*** *Sei f analytisch in Kreisring $r_1 < |z - z_0| < r_2$ und γ eine geschlossene Kurve im Kreisring.*

Dann gilt

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}Res(f, z_0)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \oint_\gamma [\underbrace{\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}}_{\to 0} + \underbrace{\ldots}_{\to 0} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{\to 0}]dz \\
&= a_{-1}\oint \frac{1}{z-z_0}dz \\
&= a_{-1}\,2\pi\mathrm{i}
\end{aligned}$$

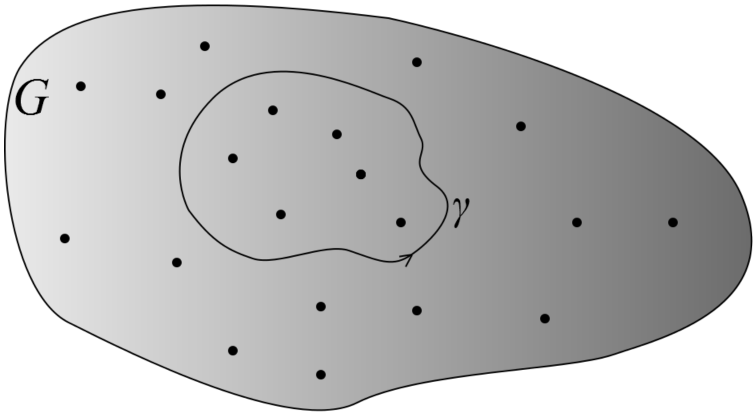
□

Etwas allgemeinere Form des Residuensatzes:

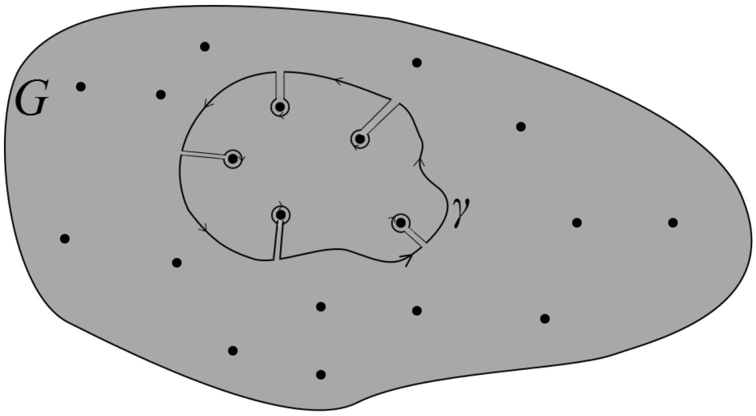
Satz. *f sei analytisch in G bis auf Pole in den Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_n \in G$. Dann gilt für eine geschlossene Kurve $\gamma \subset G$:*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k)$$

*wo die **Summe über** alle von γ **eingeschlossenen Singularitätssstellen** genommen wird!*



Beweis. Beweis des Residuensatzes mittels **Deformationstheorem**



$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\oint_{\gamma_k} f(z)dz}_{2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res}(f,z_k)}$$

□

Statt mit der Laurentreihenentwicklung kann das Residuum auch mit folgender Formel berechnet werden:

Satz. *Es habe $f(z)$ in z_0 einen einfachen Pol, dann gilt*

$$\mathit{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Beweis. Laut Voraussetzungen:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

⇒

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1}$$

□

Beispiel.
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, \quad z_0 = 0$$

$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}(z \cdot \frac{1}{z(z-1)}) = -1$

Beispiel.
$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} \quad z_0 = \mathrm{i}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) &= \lim_{z\to \mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{1}{z^2+1}\\ &= \lim_{z\to \mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\end{aligned}$$

Satz. *Es habe $f(z)$ in z_0 einen Pol k-ter Ordnung, dann gilt*

$$Res(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-z_0)^k f(z)$$

Beweis analog zu $k=1$.

Bemerkung. Wiederholung Pole

$\frac{1}{z^2+1}$	hat 2 einfache Pole, $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = -\mathrm{i}$
$\frac{1}{z(z-1)}$	hat 2 einfache Pole, $z_1 = 0, z_2 = 1$
$\frac{1}{(z+\mathrm{i})^3}$	hat dreifachen Pol bei $z_0 = -\mathrm{i}$

2.6.3 Berechnung von (reellen) Integralen mittels Residuensatz

a)Wollen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ berechnen, sei $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ wobei g,h Polynome in x mit $\mathrm{Grad}\, h \geq \mathrm{Grad}\, g + 2$, $h(x)$ habe überdies *keine reellen* Nullstellen. Dann folgt

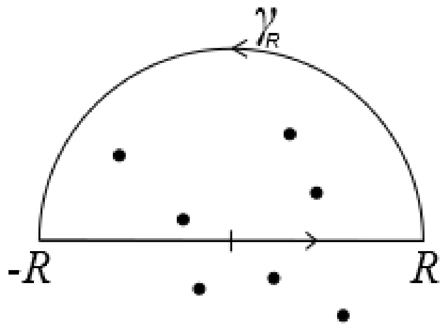
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f,z_k)$$

(Summe über all Pole in der oberen Halbebene) oder genauso

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f,z_k)$$

(Summe über all Pole in der unteren Halbebene)

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall in der oberen komplexen Halbebene



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx + \overbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz}^{=0}}_{\text{Geschl. Weg}\Rightarrow\text{Residuensatz}}$$
$$= \;2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(f, z_k)$$

Hier bezeichnet γ_R einen Halbkreis mit Radius R in der oberen komplexen Halbebene, zu zeigen ist

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \underbrace{\max_{|z|=R} |f(z)|}_{\frac{1}{R^2}} \cdot R\pi = \frac{\pi}{R} \to 0$$

Der Beweis für den unteren Halbkreis ist ähnlich, γ_R bezeichnet hier einen Halbkreis mit Radius R in der unteren komplexen Halbebene:

$$\underbrace{\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} f(x)dx + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)dx}_{=0}\right)}_{\text{geschlossener Weg}} = \overbrace{-}^{\text{Weil im Uhrzeigersinn}} 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f, z_n)$$

□

Beispiel.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\pi\mathrm{i}\;\overbrace{\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2},\mathrm{i}\right)}^{\frac{1}{2\mathrm{i}}} = \pi$$

b) Wollen Integrale vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}kx}dx, \quad k\in\mathbb{R}$$

berechnen, sowie mittels Bildung von Real- und Imaginärteil auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos kx dx\;,\;\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin kx dx$$

In all diesen Fällen habe $f(x)$ *keine reellen* Polstellen und es sei $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = 0$. Eine häufige Situation ist, dass $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ wobei g, h Polynome in x mit $\operatorname{Grad} h \geq \operatorname{Grad} g + 1$. Es gilt analog zu vorher:

Achtung Fallunterscheidung! Auf Vorzeichen von k achten

$k > 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}kx}dx &= \text{oben schließen} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)e^{ikz}, z_k)\end{aligned}$$

Pole in oberer Halbebene.

$k < 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}kx}dx &= \text{unten schließen} \\ &= -2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)e^{ikz}, z_k)\end{aligned}$$

Pole in unterer Halbebene.

Merkregel
Der Beitrag des ∞-Halbkreises soll 0 sein!
$k > 0 \Rightarrow$ oben schließen ($z \to \mathrm{i}\infty$): $e^{\mathrm{i}kz} \to e^{\mathrm{i}k\mathrm{i}\infty} = e^{-k\infty} \to 0$
$k < 0 \Rightarrow$ unten schließen ($z \to -\mathrm{i}\infty$): $e^{\mathrm{i}kz} \to e^{\mathrm{i}k(-\mathrm{i}\infty)} = e^{k\infty} \to 0$

Beispiel.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx &= Re(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}dx}{x^2+1}) \\ &= Re(2\pi\mathrm{i}\quad \underbrace{\mathrm{Res}(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+1},\mathrm{i})}_{\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{(z-\mathrm{i})e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}=\frac{e^{-1}}{2\mathrm{i}}} \\ &= Re\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}e^{-1}\right) = \pi e^{-1}\end{aligned}$$

Definition. Fouriertransformation

$$(Ff)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

Beispiel.

$$F(\frac{1}{9+x^2}) = ?$$

Prinzipiell sind 3 Fälle $k > 0, k = 0, k < 0$ zu betrachten, hier genügt es jedoch die Fallunterscheidung $k \geqslant 0, k < 0$ vorzunehmen.

Sei zunächst $k \geqslant 0$, dann müssen wir unten schließen, es liegt ein Pol bei $z_0 = -3i$ vor:

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \, Res(\frac{e^{-ikz}}{(z+3i)(z-3i)}, z_0 = -3i) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{-3k}$$

Für $k \geqslant 0$ müssen wir oben schließen, es liegt ein Pol bei $z_0 = 3i$ vor:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \, Res(\frac{e^{-ikz}}{(z+3i)(z-3i)}, z_0 = 3i) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{3k}$$

Wir können das Ergebnis zusammenfassen:

$$F(\frac{1}{9+x^2}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{-3|k|}$$

c) Hauptwert von (reellen) Integralen

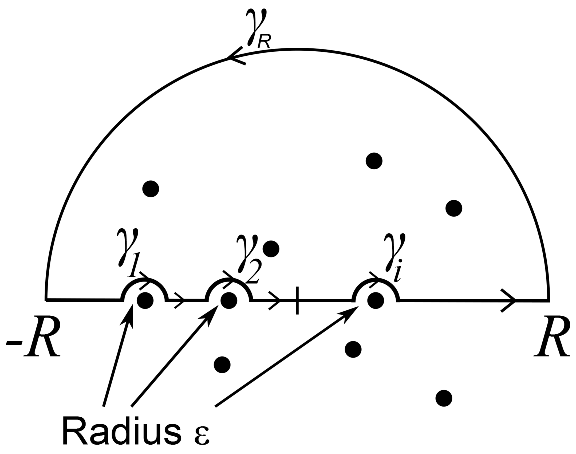
Wenn $f(x)$ bei $x_k \in \mathbb{R}, k = 1, ..., m$ unbeschränkt ist, so existiert möglicherweise der *Hauptwert* (englisch: principal value oder principal part) des Integrals:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{x_1 - \epsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} f(x)dx + ... \int_{x_k+\epsilon}^{\infty} ... \right)$$

Wenn $f(x)$ vom Typ a), b) ist und zusätzlich **einfache (!) Pole auf der reellen Achse** hat, gilt (wenn oben geschlossen wird)

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi \mathrm{i} \sum (\text{Residuen von f in oberer Halbebene}) + \pi \mathrm{i} \sum (\text{Residuen von f auf x-Achse})$$

Analoges Ergebnis erhalten wir mit negativem Vorzeichen falls unten geschlossen wird.



Beweis.

$$\lim_{R\to\infty} P \int_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \left(\sum_{\text{Pole } z_n \in [-R,R]} \overbrace{\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_k} f(z)dz}^{-\mathrm{i}\pi \mathrm{Res}(f, z_k)} \right) + \overbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz}^{=0}$$

$$= 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

Beiträge um infinitesimale kleine Halbbögen:

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \int_{\gamma_k} \left(\frac{a_{-1}}{z - z_k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^n \right) dz$$

$z(t) = z_k + \epsilon e^{\mathrm{i}t} \quad t \in [0, \pi]$
$\dot{z(t)} = \mathrm{i}\epsilon e^{\mathrm{i}t}$

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \underbrace{-a_{-1} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}\epsilon e^{\mathrm{i}t}}{z_k + \epsilon e^{\mathrm{i}t} - z_k} dt}_{-\mathrm{i}\pi a_{-1} = -\mathrm{i}\pi \mathrm{Res}(f, z_k)} + O(\epsilon)$$

□

Beispiel. Als Beispiel betrachten wir $P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x} dx$, ein reller, einfacher Pol bei $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x} dx &= \text{oben schließen!} \\ &= \mathrm{i}\pi \mathrm{Res}(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}, 0) = \mathrm{i}\pi \underbrace{\lim_{z \to z_0} \left(\frac{z e^{\mathrm{i}z}}{z} \right)}_{=1} \\ &= \mathrm{i}\pi \end{aligned}$$

Kapitel 3

Lineare Algebra

3.1 Vektorräume

Definition. Kommutative (=abelsche) Gruppe

Sei M eine Menge mit Abbildung „Addition“ $M \times M \to M$ wo

1. $\forall a, b \in M$ ist $a + b \in M$
2. $a + b = b + a$ (Kommutativität)
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
4. $\exists 0 \in M$ sodass $\forall a \in M : a + 0 = a$ (Nullelement)
5. $\forall a \in M$ existiert ein inverses Element $(-a)$ sodass $a + (-a) = 0$.

Dann heißt M Gruppe $(M, +)$.

Definition. Körper

Existieren auf der Menge K zwei verschiedene Abbildungen („Addition“ $+$ und „Multiplikation“ $\cdot$) mit

1. K ist eine kommutative Gruppe bezüglich der Addition $+$
2. $\forall a, b \in K$ ist $a \cdot b \in K$
3. $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität)
4. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)c$ (Assoziativität)
5. $\exists 1 \in K$ sodass $\forall a \in K :\ 1 \cdot a = a$ (Einheitselement)
6. $\forall a, a \neq 0 \in K$ existiert ein inverses Element a^{-1}, sodass $a \cdot a^{-1} = 1$
7. $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (Distributivität)

dann heißt die Menge K Körper $(K, +, \cdot)$

Definition. Vektorraum (VR)

Eine Menge von Elementen $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ...$ heißt Vektorraum (oder linearer Raum) V über einem Körper K (meistens $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), wenn unter den Elementen $\vec{a_i}$ eine Addition und eine Multiplikation mit einem Element $\lambda \in K$ (dem *Skalar*) definiert ist, wo gilt

1. $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe
2. $\forall \lambda \in K$ und $\vec{a} \in V$ ist $\lambda \vec{a} \in V$
3. $\lambda_1(\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \lambda_2)\vec{a}$ (Assoziativität)
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$ (Distributivität I)
5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ (Distributivität II)
6. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ wo 1 das Einheitselement aus K ist (dh $1 \cdot \lambda = \lambda \; \forall \lambda \in K$)

Beispiel. $\mathbb{R}$ ist VR über $\mathbb{R}$.

Beispiel. Die Menge $\mathbb{R}^n$ von $n-$Tupeln von Zahlen aus $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..n \right\}$$

ist VR über $\mathbb{R}$, wobei

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ ... \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel. Vektoren $\in \mathbb{R}^3$

Beispiel. Menge aller reelwertigen Funktionen, die auf $[a, b] \in \mathbb{R}$ definiert sind bildet einen VR über $\mathbb{R}$.

$$\{f | f : [a, b] \to \mathbb{R}\} \quad \text{wo}$$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \quad x \in [a, b] \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda f(x) \quad x \in [a, b] \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beispiel. Beispiel zur Verwendung der Axiome

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

Beweis.

$$0 \cdot \vec{a} = (\lambda - \lambda) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{a} = \lambda\vec{a} + (-\lambda\vec{a}) = \vec{0}$$

□

Beispiel. Sei $\lambda \neq 0 : \ \lambda\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Beweis. Da $\lambda \neq 0 \ \exists \lambda^{-1} : \ \lambda^{-1}(\lambda\vec{a}) = (\lambda^{-1}\lambda)\vec{a} = 1\vec{a} = \vec{a}$
Andererseits gilt $\lambda^{-1}(\lambda\vec{a}) = \lambda^{-1}\,\vec{0} = \lambda^{-1}[\vec{b} + (-\vec{b})] = \lambda^{-1}\vec{b} + (-\lambda^{-1}\vec{b}) = \vec{0}$
$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ □

Definition. Lineare Unabhängigkeit

n Elemente $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ...\vec{a_n}$ eines VR über K heißen linear unabhängige (l.u.a), wenn aus

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{0} \quad \lambda_i \in K$$

folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.
Andernfalls heißen sie linear abhängig (l.a.)

Beispiel. Im $\mathbb{R}^2$ sind $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ l.u.a.

Beweis. Sei $\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} = \vec{0}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

□

Beispiel. Ein einzelner Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist l.u.a.

Beweis. $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, da $\exists a_i \neq 0 \Rightarrow \lambda a_i = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ □

Beispiel. $\vec{0}$ ist linear abhängig.

Beweis. Aus $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ folgt nicht $\lambda = 0$, wir können ja $\lambda = 1$ betrachten. □

Satz. *Sind $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ l.u.a. und $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}, \vec{a_{n+1}}$ l.a. so ist $\vec{a_{n+1}}$ eine Linearkombination von $\vec{a_1}, ...\vec{a_n}$.*

Beweis. Wenn $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{0}$ so sind nicht alle $\lambda_i = 0$. Sei $\lambda_{n+1} \neq 0$ dann ist

$$\vec{a_{n+1}} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} \vec{a_i}$$

Falls aber $\lambda_{n+1} = 0$ wäre, dürften für $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{0}$ nicht alle $\lambda_i = 0$ sein , daher wären $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ linear abhängig, Widerspruch. □

Satz. *Sind $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ...\vec{a_r} (r < n)$ linear abhängig, so sind auch $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_r}, \vec{a_{r+1}}, ..., \vec{a_n}$ linear abhängig.*

Beweis. Aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{0}$ folgt für z.B.: $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = ... = \lambda_n = 0$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{0}$$

da jetzt aber nicht alle $\lambda_i = 0 \Rightarrow \vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ sind linear abhängig. □

Behauptung. *Je drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind im $\mathbb{R}^2$ linear abhängig.*

Beweis. Zunächst gilt identisch

$$(b_1c_2 - b_2c_1)\vec{a} + (c_1a_2 - c_2a - 1)\vec{b} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{c} = \vec{0}$$

z.B.: 1.te Komponente:

$$(b_1c_2 - b_2c_1)a_1 + (c_1a_2 - c_2a - 1)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0$$

Sei nun $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig.
Dann folgt $(\ ) = (\ ) = (\ ) = 0$ also insbesondere $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Damit gilt identisch $b_2\vec{a} - a_2\vec{b} = \vec{0}$ sodass $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig sind (man kann nicht $b_2 = a_2 = 0$ folgern). Wenn $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig so sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig, Widerspruch! □

Definition. Dimension
Die maximale Zahl n von linear unabhängigen Vektoren im Vektorraum V über K heißt Dimension von V, $\dim V = n$

Beispiel.

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$

Definition. Basis

Sei $\dim V = n$. Je n linear unabhängige Vektoren aus V heißen eine Basis von V.

Satz. *Sei $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}\}$ eine Basis von VR V über K. Dann läßt sich jeder Vektor $\vec{x} \in V$ eindeutig nach dieser Basis entwickeln*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{b_i} \quad x_i \in K \, eindeutig$$

Beweis. Da $\dim V = n$ müssen die $n+1$ Vektoren $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}, \vec{x}\}$ linear abhängig sein, also

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{b_i}$$

sei

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{b_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{b_i}$$

so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')\vec{b_i} = 0$$

wegen linearer Unabhängigkeit der $\vec{b_i}$ folgt $x_i - x_i' = 0$ für $i = 1, ..., n$ und somit also Eindeutigkeit! □

Satz. *Wenn $\vec{a_1}, ..., \vec{a_m}$ sowie $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ Basen von V so folgt $m = n$.*

Beweis.

1. $\vec{a_1}, ..., \vec{a_m}$ linear unabhängig $\rightarrow m \leq n$ da $\vec{b_i}$ Basis von n Elementen
2. $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ linear unabhängig $\rightarrow n \leq m$ da $\vec{a_i}$ Basis von m Elementen

□

Definition. Unterraum (UR)

Sei V ein VR über K. $U \subset V$ heißt Unterraum von V, wenn U (bezüglich der Verknüpfung in V) selbst VR ist.

Bemerkung.

$$\dim U \leq \dim V$$

Beispiel.

$$U = \{\lambda\vec{a} \mid \vec{a} \neq \vec{0} \text{ fest }, \lambda \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^2$$

Gerade durch Nullpunkt in Richtung $\vec{a}$, $\dim U = 1$

Definition. Menge aller Linearkombinationen von Vektoren $\vec{a_1}, ..., \vec{a_r} \in V$

$$\mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_r}) = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{a_i} | \lambda_i \in K\}$$

Man kann leicht zeigen

Satz. *Seien $\vec{a_1}, ..., \vec{a_r} \in V$. Dann ist $U = \mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_r})$ ein UR von V.*

Beispiel.

$$\begin{aligned} U &= \{\lambda\vec{a} \mid \vec{a} \neq \vec{0} \text{ fest}, \ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{L}(\vec{a}) \end{aligned}$$

Definition. Linear unabhängiges Erzeugendensystem

Linear unabhängige Vektoren $\vec{a_1}, ..., \vec{a_r} \in V$ heißen linear unabhängiges Erzeugendensystem von $U = \mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_4})$.

Beispiel. $\vec{e_1}, ..., \vec{e_r}$ linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$.

1. $\vec{e_1}, ..., \vec{e_r}$ linear unabhängig
2. $\vec{x} \in \mathbb{R}$ beliebig, $\vec{x} = x_i \vec{e_i} \Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{L}(\vec{e_1}, ..., \vec{e_r})$

Satz. *Wenn $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ eine Basis von VR V ist, so ist $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.*

Beweis.

- Jeder Vektor aus V ist eine Linearkombination der Basis (siehe früher) $V \subset \mathbb{L}(\vec{b_1}, ..., \vec{b_n})$
- Linearkombinationen führen nicht aus V heraus! $\mathbb{L}(\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}) \subset V \Rightarrow V = \mathbb{L}(\vec{b_1}, ..., \vec{b_n})$

□

Satz. *Ein VR V hat genau dann* $\dim V = n$*, wenn V ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von n Vektoren besitzt.*

Beweis.
$\Rightarrow$$\dim V = n$, dh. es existiert eine Basis $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$, die (obiger Satz) ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.
$\Leftarrow$Sei $V = \mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_n})$mit $\vec{a_i}$ linear unabhägig, dann ist die Maximalzahl m von linear unabhängigen Vektoren $m \geq n$.
Daher existiert eine Basis von V $\vec{b_1}, ..., \vec{b_m}$ weil $V = \mathbb{L}(\vec{b_1}, ..., \vec{b_m}) = \mathbb{L}(\vec{a_1}, ..., \vec{a_n})$ und deshalb ist $m = n$ (nach früherem Satz)

□

Beispiel.

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

(da $\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}$ linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$)

3.2 Lineare Abbildungen

Definition. Lineare Abbildung

Seien V, V' VR über demselben Körper K. Eine Abbildung $\sigma : V \to V'$ heißt linear (bzw. Homomorphismus) wenn

$$\sigma(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda\sigma(\vec{x}) + \mu\sigma(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \lambda, \mu \in K$$

Beispiel.

$$V = V' = \mathbb{R} \quad \sigma(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\sigma(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda\sigma(x) + \mu\sigma(y)$$

Beispiel.

$$V = V' = \mathbb{R} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad b \neq 0$$

$$\sigma(x) = ax + b \quad \text{ist keine lineare Abbildung}$$

Beispiel.

$$V = \mathbb{R}^n, \quad V' = \mathbb{R}$$

$$\sigma(\vec{x}) = |\vec{x}| \quad \text{ist keine lineare Abbildung!}$$

$$\sigma(\vec{x}+\vec{y}) = \underbrace{|\vec{x}+\vec{y}| \leq \vec{x}+\vec{y}}_{\text{Dreiecksungleichung}} = \sigma(\vec{x}) + \sigma(\vec{y})$$

$$\sigma(\lambda\vec{x}) = |\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}| = |\lambda|\sigma(\vec{x})$$

Satz. *Jede lineare Abbildung führt den Nullvektor $\vec{0}$ aus V in den Nullvektor $\vec{0'}$ in V' über.*

Beweis.
Sei $\vec{x} \in V$

$$\sigma(\underbrace{\vec{0}}_{\in V}) = \sigma(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot \sigma(\underbrace{\vec{x}}_{\in V'}) = \vec{0'}$$

$\square$

Definition.

$$L(V,V') = \{\sigma | V \to V'\}$$

ist die Menge aller linearen Abbildungen von V nach V'

Definition. $\sigma \in L(V,V')$ heißt injektiv wenn für $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$ gilt,

$$\sigma(\vec{v_1}) = \sigma(\vec{v_2}) \Rightarrow \vec{v_1} = \vec{v_2}$$

Definition. σ heißt surjektiv, wenn $\sigma(V) = V'$

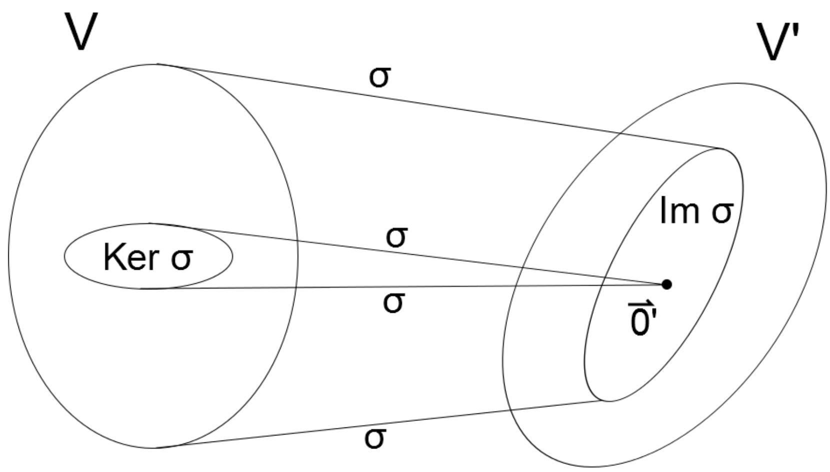
Definition. σ heißt bijektiv (oder Isomorphismus) wenn σ injektiv und surjektiv.

Definition. V heißt isomorph zu $V' : V \cong V'$ wenn $\exists$ bijektives $\sigma \in L(V,V')$

Satz. *$V \cong V'$ (isomorph) genau dann, wenn $\dim V = \dim V'$.*
(ohne Beweis)

Definition.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\sigma &= \{\vec{x} | \vec{x} \in V \text{ mit } \sigma(\vec{x}) = \vec{0'} \in V'\} \\ \operatorname{Im}\sigma &= \{\sigma(\vec{x}) | \vec{x} \in V\} \end{aligned}$$



Satz. *Für $\sigma \in L(V,V')$ gilt*

$$\dim(Ker\,\sigma) + \dim(Im\,\sigma) = \dim V$$

(ohne Beweis)

Beispiel.

$$V = \mathbb{R}^n \quad V' = \mathbb{R}^m \quad m < n$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \sigma = m \\
\operatorname{Ker} \sigma &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_{n-m} \end{pmatrix} \middle| y_i \in K \right\} \\
\dim \operatorname{Ker} \sigma &= n - m \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \sigma + \dim \operatorname{Im} \sigma = n
\end{aligned}$$

Können wir die Menge der $\sigma \in L(V, V')$ zu einem Vektorraum erweitern?

Satz. *Seien $\sigma, \tau \in L(V, V')$. Dann bildet $L(V, V')$ mit*

$$\begin{aligned}
(\sigma + \tau)(\vec{x}) &= \sigma(\vec{x}) + \tau(\vec{x}) \\
(\lambda\sigma)(\vec{x}) &= \lambda\sigma(\vec{x}) \quad \lambda \in K
\end{aligned}$$

einen Vektorraum $(L(V, V'), +)$ über K.

Definition. Dualraum

Der Dualraum V^* eines Vektorraumes V über einen Körper K ist der VR $(L(V, K), +)$ aller linearen Abbildungen von V nach K.

$$V^* = (L(V, K), +)$$

Bemerkung. Jedes Element aus V^* ist eine lineare Abbildung von V nach K und wird *lineares Funktional* genannt.

Beispiel.

$$V = \mathbb{R}^n, \quad K = \mathbb{R}, \ \sigma(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}, \quad \vec{a} \text{ fest}$$

Satz.

$$\dim V^* = \dim V \ \textit{bzw.}\ V \cong V^*$$

(ohne Beweis)

Satz. *Für lineare Abbildungen können wir neben „Addition“ + auch eine zusätzliche Verknüpfung* „Hintereinanderausführung“ *(oder* „Multiplikation“*) o definieren: Sei $\sigma \in L(V, V')$, $\quad \tau \in L(V', V'')$.*

$$\tau \ o \ \sigma : V \to V''$$

$$(\tau \ o \ \sigma) = \tau(\sigma(\vec{x})), \quad \vec{x} \in V$$

Es gilt $\tau \ o \ \sigma \in L(V, V'')$

Beweis.

$$\begin{aligned}(\tau \circ \sigma)(a\vec{x} + b\vec{x}) &= \tau(\sigma(a\vec{x} + b\vec{x}))\\ &= \tau(a\sigma(\vec{x}) + b\sigma(\vec{x}))\\ &= a\tau(\sigma(\vec{x})) + b\tau(\sigma(\vec{x}))\\ &= a(\tau \circ \sigma)(\vec{x}) + b(\tau \circ \sigma)(\vec{x})\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Betrachten wir für $\tau, \sigma \in L(V,V)$ $(L(V,V), \circ)$, so muss dies nicht immer eine Gruppe bilden!

3.3 Matrizen

Satz. *Sei $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ eine Basis des VR V. Dann ist jede lineare Abbildung $\sigma \in L(V,V')$ durch die Angabe der Abbildung der Basis $\sigma(\vec{b_i}) = \vec{c_i}$ festgelegt.*

Beweis.

$$\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = x_i\vec{b_i}$$

$$\sigma(\vec{x}) = x_i\sigma(\vec{b_i}) = x_i\vec{c_i}$$

□

Satz. *Jede lineare Abbildung $\sigma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ wird durch das Skalarprodukt von $\vec{x}$ mit einem Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.*

$$\sigma(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

Beweis. Betrachten als Basis im $\mathbb{R}^n$

$$\vec{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{i-te Zeile}, i = 1, 2, ..n \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Sei $\sigma(\vec{e_i}) = a_i \in \mathbb{R}$.

$$\sigma(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \vec{a}\vec{x}$$

□

Satz. *Jede lineare Abbildung $\sigma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wird durch das Produkt von $\vec{x}$ mit einem rechteckigen*

Zahlenschema, der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben.

Beweis. Sei

$$\sigma(\vec{e_i}) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ ... \\ a_{m_i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{x}) &= \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ ... \\ a_{mi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ ... \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

A hat m Zeilen und n Spalten, wir schreiben $A = (a_{ij})$. Ebenso verwenden wir die Notation von Vektoren in Matrixschreibweise (Vektoren sind $n \times 1$ Matrizen)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw. auch} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$$

sodass anstelle von

$$\vec{x'} = \sigma(\vec{x})$$

nunmehr

$$X' = A\,X$$

verwendet wird.

Satz. *Zweifache Basisabhängigkeit einer Matrix*

Seien V, V' VR über K, $\dim V = n$, $\dim V' = m$ mit Basen $B = \{\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}\}$ und $B' = \{\vec{b'_1}, ..., \vec{b'_m}\}$.

Es gibt eine eindeutige Abbildung von $L(V,V')$ auf die Menge der $m \times n$ Matrizen über K, die von den in V,V' gewählten Basen B und B' abhängt.

$$\sigma \Leftrightarrow A$$

Beweis.
$\Rightarrow$ Sei $\sigma(\vec{b_j}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{b'_i}$, damit erhalten wir $A = (a_{ij})$.

$\Leftarrow$ Sei $A = (a_{ij})$ gegeben, dann definieren wir $\sigma(\vec{b_j}) := \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{b'_i}$. □

Bemerkung. Im Folgenden beziehen wir uns auf allgemeine VR V,V' und bezeichnen deren Basen allgemein mit $\vec{e}_i, \vec{e'_i}$; weder sind die VR auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt, noch sind automatisch die Standardbasen

$$\vec{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{i-te Zeile}, i = 1,2,..n \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

gemeint.

Definition. Addition von Matrizen

Seien $\sigma, \tau \in L(V,V')$, $\dim V = n, \quad \dim V' = m$.

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{e_j}) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{e_i}' \\ \tau(\vec{e_j}) &= \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\vec{e_i}' \end{aligned}$$

$$\sigma\ + \tau \text{ ordnen wir } A + B \text{ zu}$$

$$(\sigma\ + \tau)(\vec{e_j}) = \sigma(\vec{e_j}) + \tau(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij} + b_{ij})\vec{e_i}'$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Definition. Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

$\lambda \in K$ und $\lambda\sigma$ ordnen wir λA zu:

$$\begin{aligned}
(\lambda\sigma)(\vec{e_j}) &= \lambda\sigma(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{e_i}' = \sum_{i=1}^{m} \lambda a_{ij}\vec{e_i}' \\
\lambda A &= (\lambda a_{ij})
\end{aligned}$$

Definition. Multiplikation von Matrizen
Seien

$$\begin{aligned}
\sigma \in L(V, V'): \ \sigma(\vec{e_j}) &= \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\vec{e_k}' \\
\tau \in L(V', V''): \ \tau(\vec{e_k}') &= \sum_{i=1}^{r} a_{ik}\vec{e_i}''
\end{aligned}$$

τ o σ ordnen wir $A \cdot B$ zu

$$\begin{aligned}
(\tau \text{ o } \sigma)(\vec{e_j}) &= \tau(\sigma(\vec{e_j})) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\tau(\vec{e_k}') \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r} b_{kj}a_{ik}\vec{e_i}'' \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\vec{e_i}'' \\
&= \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\vec{e_i}''
\end{aligned}$$

Unter dem Produkt der Matrizen $A \cdot B = C$ versteht man die Matrix $C = (c_{ij})$ mit Elementen

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

(Skalarprodukt von i-ter Zeile von A mit j-ter Spalte von B).

Beispiel. Zweifache Spiegelung an der x-Achse im $\mathbb{R}^2$, betrachten für dieses Beispiel die Standardbasis $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eine einmalige Spiegelung der Einheitsvektoren an der x-Achse liefert

$$\vec{e}_1 \to \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 \to -\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

sodass die der Spiegelung zugegeordnete Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Zweifache Spiegelung wird beschrieben durch

$$X' = A^2 X$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Achtung! Im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$. **Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ**.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Bemerkung. Für das Produkt von Matrizen gilt **Assoziativität** (siehe ÜM1)

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Bemerkung. Das Produkt zweier Matrizen A, B ist **nur** definiert, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist.

$$A_{n \times m} \cdot B_{m \times k} = C_{n \times k}$$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Definition. transponierte Matrix A^T

$$\begin{aligned}A^T &= (a_{ij}^T) = (a_{ji}) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}(A+B)^T &= A^T + B^T \\ (\lambda A)^T &= \lambda A^T \\ (AB)^T &= B^T A^T\end{aligned}$$

(Beweis sieh ÜM1)

Definition. Hermitisch konjugierte Matrix $A^\dagger$

$$A^\dagger = (A^T)^* = (a_{ij}^T)^* = (a_{ji}^*)$$

(transponierte und komplex konjugierte Matrix)

Definition. Eine quadratische Matrix A heißt

- symmetrisch wenn $A = A^T$.
- antisymmetrisch wenn $A = -A^T$
- hermitisch wenn $A = A^\dagger$
- antihermitisch wenn $A = -A^\dagger$
- normal wenn $AA^\dagger = A^\dagger A$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist hermitisch}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger = (A^T)^* = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = A$$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist normal}$$

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\ A^T A &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.4 Determinanten

Man kann jeder **quadratischen** Matrix über K eine Zahl aus K zuordnen, die Determinante

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} ... \sum_{i_n=1}^{n} \epsilon_{i_1 i_2 ... i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n} \\ &= \epsilon_{i_1 ... i_n} a_{i_1 1} ... a_{i_n n} \end{aligned}$$

dabei wurde Summenkonvention (über doppelt vorkommende Indices wird summiert) verwendet. Als Verallgemeinerung von ϵ_{ijk} definieren wir

- $\epsilon_{1\,2 ... n} = 1$
- $\epsilon_{i_1 ... i_n} = +1$ wenn $(i_1 ... i_n)$ durch gerade Zahl von paarweisen Vertauschungen auf $(1, 2, ..., n)$ gebracht werden kann

- $= -1$ durch ungerade Anzahl von Vertauschungen auf $(1, 2, ..., n)$ gebracht werden kann
- $= 0$ wenn nicht alle Indizes verschieden sind

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \epsilon_{i_1\, i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \\
&= \underbrace{\epsilon_{11}}_{=0} a_{11}a_{12} + \underbrace{\epsilon_{12}}_{=1} a_{11}a_{22} + \underbrace{\epsilon_{21}}_{=-1} a_{21}a_{12} + \underbrace{\epsilon_{22}}_{=0} a_{21}a_{22} \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-6) = 8$$

Bemerkung. $\det A$ kann aufgefasst werden als Funktion von Spaltenvektoren $\vec{a_k}$ mit Komponenten

$$(\vec{a_k})_i = a_{ik}$$

Neue Schreibweise

$$\det A = \epsilon_{i_1 \ldots i_n} (\vec{a_1})_{i_1} (\vec{a_2})_{i_2} \ldots (\vec{a_n})_{i_n} := [\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}]$$

3.4.1 Sätze über Determinanten

1. $\det A = \det A^T$

   Beweis.

   $$\begin{aligned}
   \det A^T &= \epsilon_{i_1 \ldots i_n} a^T_{i_1 1} \ldots a^T_{i_n n} = \epsilon_{i_1 \ldots i_n} \underbrace{a_{1 i_1} \ldots a_{n i_n}}_{\text{umreihen durch m-Vertauschungen}} \\
   &= \epsilon_{i_1 \ldots i_n} a_{j_1 1} \ldots a_{j_n n}
   \end{aligned}$$

   Die j's hängen von den i's ab, nach m Vertauschungen der a's sind gleichzeitig

   $$\begin{aligned}
   (i_1, i_2, ..., i_n) &\rightarrow (1, 2, ..., n) \\
   (1, 2, ..., n) &\rightarrow (j_1, j_2, ..., j_n)
   \end{aligned}$$

   also gilt $\epsilon_{i_1 \ldots i_n} = \epsilon_{j_1 \ldots j_n}$ und

   $$\det A^T = \epsilon_{j_1 \ldots j_n} a_{j_1 1} \ldots a_{j_n n} = \det A$$

   □

   Beispiel.

   $$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

2. $[\vec{a_1}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_k}, ...\vec{a_n}] = -[\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}]$
   Die Determinante ändert das Vorzeichen, wenn man zwei Spalten (zwei Zeilen) vertauscht.

Beweis.

$$\begin{aligned}\epsilon_{i_1\dots i_l\dots i_k\dots i_n}(\vec{a_1})_{i1}\dots(\vec{a_l})_{il}\dots(\vec{a_k})_{ik}\dots(\vec{a_n})_{in} &= -\epsilon_{i_1\dots i_k\dots i_l\dots i_n}(\vec{a_1})_{i1}\dots(\vec{a_l})_{il}\dots(\vec{a_k})_{ik}\dots(\vec{a_n})_{in}\\ &= -\epsilon_{i_1\dots i_k\dots i_l\dots i_n}(\vec{a_1})_{i1}\dots(\vec{a_k})_{ik}\dots(\vec{a_l})_{il}\dots(\vec{a_n})_{in}\\ &= -[\vec{a_1},\dots,\vec{a_k},\dots,\vec{a_l},\dots,\vec{a_n}]\end{aligned}$$

□

3. $[\vec{a_1},\dots,\lambda\vec{a_k},\dots,\vec{a_n}] = \lambda[\vec{a_1},\dots,\vec{a_k},\dots,\vec{a_n}] = \lambda\det A$
4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ folgt aus 3.
5. $[\vec{a_1},\dots,\vec{a_k}+\vec{b_k},\dots,\vec{a_n}] = [\vec{a_1},\dots,\vec{a_k},\dots,\vec{a_n}] + [\vec{a_1},\dots,\vec{b_k},\dots,\vec{a_n}]$

Achtung vor Trugschluß

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

6. $\det \mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{vmatrix} = [\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n}] = 1$

Beweis.

$$\epsilon_{i_1\dots i_n}\underbrace{(\vec{e_1})_{i_1}}_{\delta_{1i_1}}\dots\underbrace{(\vec{e_n})_{i_n}}_{\delta_{ni_n}} = \epsilon_{1\dots n} = 1$$

□

7. $[\vec{a_{k_1}},\vec{a_{k_2}},\dots,\vec{a_{k_n}}] = \epsilon_{k_1\dots k_n}[\vec{a_1},\vec{a_2},\dots,\vec{a_n}]$

Beweis.

$$\epsilon_{i_1\dots i_n}(\vec{a_{k_1}})_{i1}\dots(\vec{a_{k_n}})_{in} = \epsilon_{i_1\dots i_n}(\vec{a_1})_{\gamma_1}\dots(\vec{a_n})_{\gamma_n}$$

$(k_1,\dots,k_n)\to(1,2,\dots,n)$ durch eine gewisse Zahl m von Vertauschungen,
gleichzeitig $(i_1,\dots,i_n)\to(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, damit $\epsilon_{i_1\dots i_n} = \epsilon_{k_1\dots k_n}\epsilon_{\gamma_1\dots\gamma_n}$

□

8. $\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$

Beweis.

$$\begin{aligned}\det(A\cdot B) &= \epsilon_{i_1\dots i_n}(A\cdot B)_{1i_1}(A\cdot B)_{2i_2}\dots(A\cdot B)_{ni_n}\\ &= \epsilon_{i_1\dots i_n}a_{1j_1}b_{j_1i_1}a_{2j_2}b_{j_2i_2}\dots a_{nj_n}b_{j_ni_n}\\ &= a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}\epsilon_{i_1\dots i_n}b_{j_1i_1}b_{j_2i_2}\dots b_{j_ni_n}\\ &= a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}\epsilon_{j_1\dots j_n}\det B = \det A\cdot\det B\end{aligned}$$

□

9. $\det A = 0 \Leftrightarrow$ Spalten (Zeilen) Vektoren sind linear abhängig.

   Beweis.
   $\Leftarrow$ wenn Spalten (Zeilen)vektoren linear abhängig, so ist zumindest eine Spalte Linearkombination der anderen, d.h. - gemäß Determinantenregel 5 - mindestens 2 Spalten (bis auf Vorfaktor) gleich und somit $\det A = 0$.

   $\Rightarrow$ Sei $\det A = 0$ und seien $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ linear unabhängig. $\rightarrow \vec{e_i} = \lambda_{ki}\vec{a_k}$.

   $$\mathbf{1}=[\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}] = \lambda_{k_1 1}...\lambda_{k_n n}[\vec{a_{k_1}}, ..., \vec{a_{k_n}}] = \lambda_{k_1 1}...\lambda_{k_n n}\epsilon_{k_1...k_n} \det A = 0$$

   Widerspruch!

   □

10. **Entwicklungssätze**

   $$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

   dies ist Entwicklung nach der $k - ten$ Spalte (keine Summation über k)

   $$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

   dies ist Entwicklung nach der $i - ten$ Zeile (keine Summation über i)

   A_{ik} erhält man aus A durch Wegstreichen der $i - ten$ Zeile und $k - ten$ Spalte.

   Beispiel. Entwicklung nach erste Spalte

   $$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 - 6 = -7$$

   Entwicklung nach dritter Zeile

   $$6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 1 = -7$$

   Beweis. Trick: $\vec{a_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{e_i}$

   $$[\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n}] = \sum_{i=1}^{n} [\vec{a_1}, ..., a_{ik}\vec{e_i}, ..., \vec{a_n}]$$

$\vec{e_i}$ verschieben wir zuerst $(n-k)$ mal nach rechts, dann die $i-$te Zeile $(n-i)$mal nach unten

$$[\vec{a_1}, ..., \vec{e_i}, ..., \vec{a_n}] = \det \begin{pmatrix} & A_{ik} & & 0 \\ & & & ... \\ a_{i_1} & ... & a_{i_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} (-1)^{-n+k+n+i} = (-1)^{k+1} \det A_{ik}$$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

Dies folgt aus

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ y_1 ... y_{n-1} & 1 \end{pmatrix} = \epsilon_{i_1 ... i_{n-1} i_n} \begin{pmatrix} \vec{x_1} \\ y_1 \end{pmatrix}_{i_1} ... \begin{pmatrix} \vec{x}_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}_{i_{n-1}} \underbrace{(\vec{e_n})_{i_n}}_{\delta_{n i_n}}$$

$$= \epsilon_{i_1 ... i_{n-1}} (\vec{x_1})_{i_1} ... (\vec{x_n})_{i_{n-1}} = \det X$$

□

Definition. Zeilenrang, Spaltenrang
Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen- (Spalten) vektoren einer Matrix heißt Zeilen (Spalten)rang.

Satz. *Zeilenrang = Spaltenrang (=Rang)*
(ohne Beweis)

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Zeilenrang:

$$(1, 1, 2), \ (2, 2, 3)$$

sind linear unabhängig, daher Zeilenrang = 2.

Spaltenrang:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig, daher Spaltenrang = 2.

Bemerkung.

$$\text{Rang } A = \dim \text{ Im } \sigma$$

Da $\sigma(\vec{e_j}) = \vec{a_j} \in \mathbb{R}^m$

ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A gleich $\dim \text{Im}\, \sigma$.

Definition. Unterdeterminanten

Durch Streichen von Zeichen und Spalten lassen sich aus einer $n \times m$ Matrix quadratische $k \times k$ Matrizen bilden, wo $k \leq \min(m, n)$. Die zugehörigen Determinanten heißen Unterdeterminanten.

Satz. *Der Rang r einer $n \times m$ Matrix A ist gleich der größten Zahl r, für die es eine nichtverschwindende $r \times r$ Unterdeterminante gibt.*

Beispiel. A...2×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

da

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r = \text{Rang } A = 2$$

Beispiel. A...3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0... \rightarrow r = \text{Rang } A = 2$$

3.4.2 Matrixinvertierung

Von früher wissen wir bereits, dass Umkehrabbildungen für bijektive Abbildungen existieren, dies kann wie folgt formuliert werden:

Satz. *Sei $\sigma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Es existiert σ^{-1} genau dann, wenn σ bijektiv, also muss $n = m$ und $\dim Im\sigma = n$ sein, dh. Rang $A = n$, bzw. $\det A \neq 0$ gelten.*

$$\sigma^{-1} \textit{ ordnen wir } A^{-1} \textit{ zu}$$

Analog gilt, dass Rang $A^{-1} = n$.

Satz. *Zu $n \times n$ Matrix A existiert genau dann A^{-1} mit $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$, wenn $\det A \neq 0$.*

Beweis.

$\Rightarrow$ wenn ein σ^{-1} existiert, so ist $\det A \neq 0$

$\Leftarrow$ sei $\det A \neq 0$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \frac{\det A_{ik}}{\det A} && \text{vgl. Entwicklung nach k-ter Spalte} \\ 0 &= [\vec{a_1}, ..., \underbrace{\vec{a_k}, \vec{a_k}}_{\text{gleich}}, ..., \vec{a_n}] = && \text{Entwicklung nach j-ter Spalte} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{\tilde{a_{ij}}}_{a_{ik}} \underbrace{\det \tilde{A_{ij}}}_{\det A_{ij}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} \det A_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Hier ist $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ eine Matrix, die man aus A dadurch erhält, indem man die j-te Spalte von A durch die k-te Spalte von A ersetzt.

Wir fassen zusammen:

$$\rightarrow \delta_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j} \frac{\det A_{ij}}{\det A}}_{=:a_{ji}^{-1}} a_{ik}$$

$$a_{ji}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ij}}{\det A} \qquad \text{(keine Summation über } i, j)$$

Beachte die verdrehte Indexreihenfolge!

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^{-1} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad A^{-1} A = \mathbf{1}$$

□

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \\ \det A_{11} &= 2 \\ \det A_{12} &= 0 \\ \det A_{21} &= -1 \\ \det A_{21} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{-1} &= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\ a_{12}^{-1} &= \frac{1}{2}(-1)^{1+2}(-1) = \frac{1}{2} \\ a_{21}^{-1} &= \frac{1}{2}(-1)^{1+2} \cdot 0 = 0 \\ a_{22}^{-1} &= \frac{1}{2} 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Satz.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Beweis.

$$\mathbf{1} = A\, A^{-1}$$

$$1 = \det \mathbf{1} = \det A\, A^{-1} = \det A \, \det A^{-1}$$

□

Als Beispiel für die Verwendung des Inversen von Matrizen betrachten wir das Transformationsverhalten von Vektorkomponenten sowie von Matrizen unter Basiswechsel:

Beispiel. Ein Basiswechsel $B = \{\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}\} \to B' = \{\vec{b'_1}, ..., \vec{b'_n}\}$ in einem n-dimensionalen VR sei auf folgende Weise durch eine invertierbare Matrix $S = (s_{ik})$ definiert

$$\vec{b'_i} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} b_k$$

Beachte die Indexreihenfolge in der obigen Definition. Ein Vektor bleibt bei Basiswechsel unverändert, nur die Komponenten ändern sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_n \vec{b_k} &= \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{b'_i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x'_i s_{ki} \vec{b_k} \end{aligned}$$

Entwicklung nach Basis ist eindeutig, daher

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x'_i s_{ki} = \sum_{i=1}^{n} s_{ki} x'_i$$

In Matrixnotation erhalten wir für die Änderung der Komponenten des Vektors

$$X = SX'$$

bzw.

$$X' = S^{-1} X$$

Analog ändert sich auch eine Matrix bei Basiswechsel. Ausgangspunkt sind lineare Abbildungen $\sigma \in L(V, V)$ mit $\dim V = n$ und zugeordneter quadratischer Matrix A. Wir bezeichnen $\vec{y} = \sigma(\vec{x})$ und schreiben in Matrixform

$$Y = AX$$

Es gilt in Bezug auf die transformierte Basis

$$\begin{aligned} Y' &= S^{-1} Y = S^{-1} A X \\ &= \underbrace{S^{-1} A S}_{:=A'} X' \end{aligned}$$

$$A' = S^{-1} A S$$

Definition. Wir nennen im $\mathbb{R}^n$ die Matrix A orthogonal, wenn

$$A^T = A^{-1}$$

Definition. Wir nennen im $\mathbb{C}^n$ die Matrix A unitär, wenn

$$A^\dagger = A^{-1}$$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist hermitisch } A = A^\dagger$$

und auch unitär

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 Lineare Gleichungssysteme

A heißt Matrix des linearen Gleichungssystems

$$A\,X = B$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ ... &= ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Gegeben $m \times n$ Matrix A, sowie $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$, gesucht ist $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

3.5.1 homogenes lineares Gleichungssystem

$$A\,X = 0$$

entspricht einer linearen Abbildung $\sigma(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \sigma \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. $\vec{x}$ ist Lösung des Gleichungssystems, wenn $\vec{x} \in \operatorname{Ker}\sigma$.

Satz. *Homogenes lineares Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung $X = 0$ (d.h. $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$).*

Beweis.

$$\vec{0} \in \operatorname{Ker}\sigma$$

□

Satz. *Ein homogenes lineares Gleichungssystem $A\,X = 0$ mit $m \times n$ Matrix A hat **nur** die triviale Lösung $X = 0$, wenn Rang $A = n$.*

Beweis.

$$\operatorname{Ker}\sigma = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}\sigma = 0 \Leftrightarrow n = \dim \mathbb{R}^n = \underbrace{\dim \operatorname{Im}\sigma}_{\text{Rang } A}$$

□

Satz. *Die allgemeine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $A\,X = 0$ mit $m \times n$ Matrix A von Rang n ist ein Vektorraum der Dimension $n - r$.*

Beweis.

$$\dim \operatorname{Ker} \sigma = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Im} \sigma = n - r$$

□

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + ... + \lambda_{n-r} \vec{x_{n-r}}$$

wo $\vec{x_i}$ linear unabhängige Lösungsvektoren sind.

Für $m = n$ erhalten wir den wichtigen Spezialfall:

Satz. *Das quadratische homogene lineare Gleichungssysteme $AX = 0$ mit $m \times m$ Matrix A hat genau dann eine **nichttriviale** Lösung $X \neq 0$, wenn $\det \mathbf{A} = \mathbf{0}$.*